

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

INSTITUT DE PHYSIQUE

Symétrie en mécanique quantique

Les groupes de Heisenberg

THÈSE

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Mireille AUBERSON

NEUCHÂTEL
1980

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

INSTITUT DE PHYSIQUE

Symétrie en mécanique quantique

Les groupes de Heisenberg

THÈSE

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Mireille AUBERSON

NEUCHÂTEL
1980



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555006_0008

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Symétrie en mécanique quantique

Les groupes de Heisenberg

de Mlle Mireille Auberson

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,
sur le rapport des membres du jury,

MM. M. Romerio, P. Huguenin, W. Soerensen

et M. Boon (Nimègue)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 30 avril 1980

Le doyen:

K. Bernauer

K. Bernauer



"La philosophie est écrite dans ce très grand livre qui se tient constamment ouvert devant les yeux (je veux dire l'Univers), mais elle ne peut se saisir si tout d'abord on ne se saisit point de la langue et si on ignore les caractères dans lesquels elle est écrite. Cette philosophie, elle est écrite en langue mathématique; ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquels il est impossible de saisir humainement quelque parole; et sans lesquels on ne fait qu'errer vainement dans un labyrinthe obscur."

G. GALILEI dans : "IL SAGGIATORE"

(Le Opere, Edizione nazionale,
t. VI, 1890 - 1909)

T A B L E D E S M A T I E R E S

	Page
INTRODUCTION	I.1
CHAPITRE I : LES GROUPES DE SYMETRIE EN PHYSIQUE	
QUANTIQUE	1
§I.1. Symétrie d'un système physique	2
§I.2. Relèvement de représentations projectives continues unitaires-antiunitaires d'un groupe topologique G	8
§I.3. Groupe de symétrie dynamique d'un système physique et constantes du mouvement.	28
§I.4. Groupe de symétrie d'un opérateur autoadjoint dans un espace de Hilbert.	35
§I.5. Algèbre de symétrie d'un opérateur autoadjoint dans un espace de Hilbert.	36
CHAPITRE II : LES GROUPES DE HEISENBERG	
§II.1. Relations de commutation canoniques et groupes de Heisenberg	42
§II.2. Construction de quelques représentants de la classe d'équivalence des représentations continues unitaires irréductibles du groupe de Heisenberg $H(2k+1)$ sur $\mathcal{H}$, envoyant $(t,0)$ sur $e^{i\lambda t} I_{\mathcal{H}}$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$	51
§II.3. Construction des opérateurs d'entrelacement entre les représentations de $H(2k+1)$ appartenant à $\mathcal{K}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, et exhibées au §II.2.	80
§II.4. A propos de certains opérateurs autoadjoints Q^j, P^j , $j = 1, 2, \dots, k$, satisfaisant les relations de commutation canoniques	95

TABLE DES MATIERES

(suite)

	Page
CHAPITRE III : LES REPRESENTATIONS CONTINUES UNITAIRES IRREDUCTIBLES DES GROUPE DE HEISENBERG DANS LA PRATIQUE.	.112
§III.1. Analyse harmonique sur la variété de Heisenberg.	.114
§III.2. Etats cohérents	.120
§III.3. Les symétries de translation de l'hamiltonien d'un électron de Bloch soumis à un champ magnétique constant	.145
§III.3.1. Groupe et algèbre de symétrie de translation de l'hamiltonien d'un électron soumis à un champ magnétique constant.	.145
§III.3.2. Construction d'un ensemble de fonctions propres de l'hamiltonien H_0	.158
§III.3.3. Groupe de symétrie de translation de l'hamiltonien d'un électron de Bloch soumis à un champ magnétique constant	.166
REFERENCES	.(i)

I N T R O D U C T I O N

Les recherches de Heisenberg d'une part et de Schrödinger d'autre part, conduites dans les années 1924 et 1925, sont considérées comme la base de la théorie des quanta. Elle aboutirent à la naissance de la mécanique quantique. Von Neumann fut le premier à formuler dans une mathématique rigoureuse les éléments de la mécanique quantique et même, il démontra l'équivalence des théories établies par Heisenberg et Schrödinger. Cette découverte, raffinement de la mécanique, a révolutionné la physique et fut du même coup un puissant stimulant à la généralisation et aux développements de la théorie de représentation des groupes. C'est déjà en 1926 et 1927 que l'on trouve les premières applications de représentation des groupes en théorie quantique. Elles sont dues à Wigner.

Actuellement, la théorie de représentation des groupes est un des principaux outils mathématiques, au même titre que l'analyse fonctionnelle et la théorie de plusieurs variables complexes, en physique atomique, physique nucléaire, physique de l'état solide, physique des particules élémentaires.

L'influence de la physique sur la mathématique est bien comprise. Par contre, les contributions de la mathématique à la physique ne sont pas aussi bien comprises [R.S.]. L'analyse de modèles mathématiques pour des phénomènes physiques est un des objectifs de la physique mathématique.

Le terme "analyse" signifie ici à la fois dérivation rigoureuse de formules explicites et investigations de la structure interne mathématique des modèles. Dans les deux cas, les problèmes mathématiques qui surviennent peuvent conduire à des questions mathématiques plus générales, non associées à un modèle particulier.

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la physique mathématique. Il traite de systèmes physiques simples en mécanique quantique non relativiste, essentiellement par la théorie des groupes. Il se compose de trois chapitres. Les deux premiers s'occupent de questions purement mathématiques, issues de l'étude de systèmes physiques simples. Quant au

troisième chapitre, il est entièrement consacré à l'utilisation pratique des notions développées dans les chapitres précédents.

Pour avoir un aperçu du genre de problèmes que l'on va aborder, considérons par exemple le système d'un électron dans un cristal tridimensionnel infini décrit par un potentiel périodique et soumis à un champ magnétique. Ce système, considéré en 1928 par Bloch, est encore aujourd'hui un modèle de base pour résoudre nombre de problèmes en physique de l'état solide. On peut, de diverses façons, obtenir des propriétés générales des valeurs propres et fonctions propres de l'hamiltonien de ce système. Une approche assez moderne du problème consiste à tirer parti des symétries de translation du système (voir Brown [Br.] 1968, Zak [Za.1] 1968, Bentosela [Be.] 1970, Boon [Boo.1] 1972 et 1976). Pour ce faire, selon la méthode habituelle d'application de la théorie des groupes à un système en mécanique quantique, il faut découvrir un ensemble d'opérateurs unitaires qui commutent à l'hamiltonien de ce système. Ces opérateurs représentent un groupe abstrait appelé le groupe de symétrie de l'hamiltonien.

Déjà dans le cas particulier d'un électron soumis à un champ magnétique constant, il faut procéder en plusieurs temps pour déterminer le groupe de symétrie de l'hamiltonien de ce système. En effet, bien que l'ensemble d'opérateurs unitaires provenant des symétries de translation du champ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ commutent à cet hamiltonien, ils ne constituent pas une représentation du groupe des translations dans $\mathbb{R}^3$. Ces opérateurs forment ce que l'on appelle une représentation à multiplicateur (projective) du groupe des translations. Exploitant cette information, on va essayer de se libérer du multiplicateur, c'est-à-dire relever la représentation à multiplicateur en question en une représentation au sens habituel du terme (donc linéaire), pour trouver le groupe de symétrie de translation de cet hamiltonien.

La recherche du groupe de symétrie de translation de l'hamiltonien du système d'un électron soumis à un champ magnétique constant soulève des questions auxquelles nous répondrons au cours de ce travail. Par exemple :

- Comment le groupe de symétrie de translation de cet hamiltonien est-il lié au groupe de translations dans $\mathbb{R}^3$?

- Y a-t-il plusieurs manières de relever une représentation à multiplicateur d'un groupe pour obtenir une représentation (linéaire) ?
- Comment le groupe de symétrie de translation de cet hamiltonien dépend-il du choix de la jauge, de l'orientation et de l'intensité du champ magnétique ?

En 1930, Landau [L.] a montré que les états propres de l'hamiltonien d'un électron soumis à un champ magnétique constant se séparent en deux parties; une correspondant au mouvement du système le long du champ, l'autre au mouvement dans le plan normal au champ. Les solutions propres correspondant au mouvement du système le long du champ sont bien connues, elles sont identiques aux solutions du problème avec champ nul. Le spectre relatif au mouvement du système dans le plan normal au champ est similaire au spectre d'un oscillateur harmonique. La différence importante entre ces deux derniers systèmes est dans les solutions propres de leurs hamiltoniens. Les niveaux de Landau sont infiniment dégénérés.

Ces propos nous conduisent aux réflexions suivantes :

- L'hamiltonien d'un oscillateur harmonique à une dimension en mécanique quantique est la somme des carrés des observables Q et P . Les opérateurs Q, P et I (identité) vérifient les relations de commutation canoniques $[Q, P] = i\hbar I$, $[Q, Q] = [P, P] = 0$; ils forment la base d'une algèbre de Lie dont le groupe de Lie s'appelle groupe de Heisenberg. Existe-t-il une relation entre ce groupe de Heisenberg et le groupe de symétrie de translation de l'hamiltonien d'un électron soumis à un champ magnétique constant ?
- Y a-t-il un lien entre certains états propres de l'hamiltonien décrivant le mouvement d'un électron soumis à un champ magnétique constant dans le plan perpendiculaire au champ et les états cohérents de Glauber ?

Nous examinerons ces questions dans le troisième chapitre.

Avant de détailler le contenu de chaque chapitre, mentionnons que tous les termes soulignés dans cette introduction font partie du vocabulaire clef de notre étude.

Dans le chapitre I, nous examinons les groupes de symétrie en physique quantique. Nous partons de l'approche de Wigner [Wi.] de l'étude des symétries d'un système physique Σ en mécanique quantique. Ce point de vue nous conduit à travailler avec des représentations projectives. Une représentation projective étant non linéaire, elle est peu commode; on peut la relever en une représentation à multiplicateur du même groupe, ou encore en une représentation linéaire d'une extension du groupe de départ. Le problème d'extension de groupe présente beaucoup de difficultés et, même en mathématique, il est loin d'être résolu dans sa généralité [Bar.1], [Ca.2]. A ce sujet, nous nous bornons à exposer sous forme de synthèse les méthodes et résultats existants auxquels nous aurons recours par la suite. Utilisant cette théorie du relèvement des représentations projectives, nous définissons le groupe dynamique de Σ et nous introduisons l'hamiltonien H d'un système quantique Σ [Jo.]. Existe-t-il une définition qui, sans faire appel à des représentations projectives, serait équivalente à la définition habituelle du groupe de symétrie dynamique d'un système Σ ? Pour un grand nombre de groupes, il est possible de répondre affirmativement à cette question; la démonstration de l'équivalence des définitions, résultat simple en soi, requiert bien des précautions.

A la fin de ce chapitre I, nous nous limitons à la classe des groupes et algèbres de Lie. Nous savons qu'une manière d'identifier le groupe de symétrie d'un opérateur autoadjoint dans un espace de Hilbert avec "quelque chose" qui possède une signification physique consiste à examiner les générateurs de ce groupe. Puisque nous travaillons en physique mathématique, pourquoi ne pas définir l'algèbre de symétrie d'un opérateur autoadjoint? La dernière proposition de ce premier chapitre établit le lien entre le groupe de symétrie et l'algèbre de symétrie d'un opérateur autoadjoint.

A propos de la notion d'algèbre de symétrie, on pourrait se demander s'il est préférable de considérer les groupes de Lie ou les algèbres de Lie comme structure fondamentale dans un travail en mécanique quantique. Dans certains problèmes, travailler avec un groupe ou avec une algèbre de Lie est une question de goût, dans d'autres, c'est une question de commodité. Mettons seulement en évidence que le passage d'un groupe de

Lie (non compact) à son algèbre de Lie nous oblige à étudier les domaines de définition de certains opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert. Cette étude est délicate et on a tendance à la négliger en la classant comme "non physique". C'est certainement une des raisons pour lesquelles on entend parler du groupe de symétrie plutôt que de l'algèbre de symétrie d'un opérateur autoadjoint.

Les groupes de Heisenberg sont au centre des considérations du chapitre II. La structure cinématique d'un système physique Σ en mécanique quantique, d'espace de phase $\mathbb{R}^{2k}$, est décrite par les relations de commutation canoniques (C.C.R.)

$$[Q^j, P^l] = i\hbar \delta_{jl} \text{Id}_D, \quad [Q^j, Q^l] = [P^j, P^l] = 0, \quad \forall j, l = 1, 2, \dots, k$$

où l'entité Q^j (respectivement P^l) a la signification d'opérateur position (respectivement d'opérateur moment) d'une particule; D est un sous-espace dense d'un espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Sigma)$ de dimension infinie. En 1928, Weyl [We.] a trouvé une interprétation naturelle de la cinématique quantique telle qu'elle est décrite par les C.C.R., faisant appel à une représentation projective continue unitaire irréductible du groupe abélien $\mathbb{R}^{2k}$. Suite à cette interprétation et aux connaissances que nous avons des représentation projectives, on est conduit à se demander : "Soit une représentation projective continue unitaire irréductible (rep. PCUI) de $\mathbb{R}^{2k}$; de quel groupe le relèvement de cette représentation PCUI est-il une représentation linéaire ? Comment les C.C.R. sont-elles reliées à cette représentation linéaire ?"

Nous commençons le chapitre II en posant le problème plus général : "Déterminer toutes les représentation projectives continues unitaires irréductibles de $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ ". Une façon d'aborder ce problème consiste à utiliser la théorie du relèvement des représentation projectives. Par cette méthode, on peut formuler des questions équivalentes au problème de départ lorsque $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Par exemple "quel est l'ensemble de toutes les représentations continues unitaires irréductibles d'un groupe de Heisenberg de dimension $2k+1$?" La réponse à cette dernière question est bien connue en physique (unicité des C.C.R.); elle découle du théorème de Stone-Von Neumann [St.], [Von N.]. Cette démarche nous permet

d'une part de résoudre le problème initial. D'autre part, elle nous conduit à construire les groupes de Heisenberg (comme extensions de $\mathbb{R}^{2k}$ par $\mathbb{R}$) et à donner explicitement le lien entre ces différents groupes. On en déduit, par exemple, les isomorphismes entre les groupes de Heisenberg suivants ($k=1$)

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_2 &= \left\{ (t; (x, y)) ; t \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R} ; \text{ muni du produit} \right. \\ &\quad \left. (t; (x, y))(t'; (x', y')) = (t+t' + xy' - yx'; (x+x', y+y')) \right\} \\ \mathbb{H}_1 &= \left\{ (t; (x, y)) ; t \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R} ; \text{ muni du produit} \right. \\ &\quad \left. (t; (x, y))(t'; (x', y')) = (t+t' + yx', (x+x', y+y')) \right\} \\ \mathbb{H}_3 &= \left\{ (t; (x, y)) ; t \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R} ; \text{ muni du produit} \right. \\ &\quad \left. (t; (x, y))(t'; (x', y')) = (t+t' + \theta xy'; (x+x', y+y')) , \theta \in \mathbb{R} - \{0\}, \text{ fixé} \right\} \end{aligned}$$

Le fait de se placer dans une représentation plutôt qu'une autre peut grandement faciliter la résolution d'un problème donné. C'est pourquoi il est utile de connaître quelques représentants d'une classe d'équivalence des représentations continues unitaires irréductibles d'un groupe de Heisenberg [Car.]; pour passer d'un espace de représentation aux autres, nous calculons explicitement les opérateurs d'entrelacement.

Une représentation continue unitaire irréductible (rep. CUI) d'un groupe de Heisenberg donne lieu d'une manière naturelle aux C.C.R. Qu'en est-il du problème inverse ? Nous allons voir que les changements de sections apparaissant dans la théorie d'extension de groupes, exposée au cours du chapitre I et appliquée à $\mathbb{R}^{2k}$ pour construire les groupes de Heisenberg, permettent de trouver dans bien des cas "quand certains opérateurs autoadjoints satisfaisant les C.C.R. proviennent d'une représentation CUI d'un groupe de Heisenberg".

Dans le troisième et dernier chapitre, nous nous trouvons face à trois problèmes; la solution de chacun repose sur les notions développées dans les chapitres précédents. Dans les trois cas, le groupe de Heisenberg de dimension trois ($k=1$) et sa représentation de type réseau occupent une place privilégiée.

Depuis quelques années, il y a un regain d'intérêt pour les systèmes d'états cohérents. L'envergure du champ d'application des systèmes d'états cohérents de Glauber [Gl.1 et 2] et des états cohérents généralisés [Pe.4] recouvre plusieurs domaines de la physique. Les deux premiers problèmes, l'un reflétant le besoin du mathématicien, l'autre celui du physicien, permettent de montrer qu'un sous-ensemble discret des états cohérents de Glauber (états cohérents généralisés d'un groupe de Heisenberg de dimension trois) constitue une "bonne base" de $L^2(\mathbb{R})$. "Bonne base" est écrit entre guillemets, car les états cohérents de Glauber étant non orthogonaux, il faut être prudent dans l'interprétation du développement d'un élément quelconque de $L^2(\mathbb{R})$ dans ce système total d'états [A.T.] et [B.Z.]. Le dernier problème traite deux sujets. D'une part on examine les questions énoncées au début de cette introduction à propos du système d'un électron soumis à un champ magnétique constant. D'autre part, on cherche le groupe de symétrie de translation de l'hamiltonien du système d'un électron dans un potentiel périodique et soumis à un champ magnétique constant; puis on mentionne une utilisation pratique de ce groupe.

Chacun des trois chapitres de ce travail se divise en paragraphes. La plupart des paragraphes se terminent par une revue des résultats qui viennent d'être acquis, où l'on stipule parfois un problème ouvert.

Les conventions auxquelles nous avons recours sont intégrées au texte. Elles sont notées (C,.); elles figurent aux pages 2, 7, 25 et 52.

Ces recherches ont été réalisées sous la direction de M. M. Romerio, dont les conseils m'ont été précieux. Qu'il trouve ici le témoignage de ma reconnaissance. Je tiens à adresser mes remerciements à MM. M. Boon, P. Huguenin et W. Sørensen, membres du jury. Je remercie également les professeurs de physique théorique et de physique du solide de l'Institut de Physique de Neuchâtel, mon collègue de physique-mathématique, ainsi que mon amie Anne-Marie, pour la part qu'ils ont prise à plusieurs discussions. Je sais gré à Mme B. Serag-El-Dine du soin qu'elle a mis à dactylographier le texte.

Neuchâtel, le 18 janvier 1980.

CHAPITRE I : LES GROUPE DE SYMETRIE EN PHYSIQUE QUANTIQUE

Dans le paragraphe I.1., partant de l'approche de Wigner du problème des symétries d'un système physique Σ en mécanique quantique, nous définissons d'une manière naturelle le groupe de symétrie de Σ ; cela nous conduit à travailler avec des représentations projectives. Une représentation projective étant non linéaire, elle est peu commode; on peut la relever en une représentation à multiplicateur du même groupe, ou encore en une représentation linéaire d'une extension du groupe de départ, voir §I.2. Puis dans le paragraphe I.3., à l'aide de cette théorie du relèvement des représentations projectives, nous définissons le groupe dynamique de Σ et nous introduisons l'hamiltonien H d'un système quantique Σ . Ensuite nous démontrons (§I.3. Prop. 5) l'équivalence entre la définition habituelle du groupe de symétrie dynamique d'un système physique Σ (§I.3. Déf. 23) et une définition du même concept ne faisant pas intervenir de représentations projectives. Finalement, après avoir défini un groupe de symétrie d'un opérateur autoadjoint dans un espace de Hilbert (§I.4. Déf. 25), se restreignant à la classe des groupes de Lie, nous établissons la définition d'une algèbre de symétrie d'un tel opérateur (§I.5. Déf. 31). Nous terminons ce chapitre en discutant le lien entre le groupe de symétrie et l'algèbre de symétrie d'un opérateur autoadjoint (§I.5. Prop. 9).

Cette présentation du chapitre I nous permet d'introduire un grand nombre de concepts et de résultats dont nous avons besoin par la suite.

§ I.1. SYMETRIES D'UN SYSTEME PHYSIQUE

Intuitivement, pensant à l'étymologie grecque du mot "symétrie" : "sun = avec" et "métron = mesure", on peut dire qu'une symétrie d'un système physique est une transformation du système, qui préserve la structure de la description considérée.

Il y a deux formulations familières du concept général de symétrie : celle donnée par les symétries de Wigner et celle faisant appel au formalisme des C^* -algèbres. On peut montrer que les deux points de vue sont équivalents en mécanique quantique traditionnelle (c'est-à-dire sans règles de supersélection; voir [Em.] et [Ri.]). Comme les règles de supersélection ne jouent pas de rôle direct dans les applications physiques discutées dans ce travail (C.1) nous traiterons uniquement des systèmes quantiques sans règles de supersélection.

Soit Σ un système physique remplissant les conditions habituelles de la mécanique quantique. Rappelons-les, pour fixer les notations (voir chapitre III de [JO.] vol. I) :

$\mathcal{O} = \mathcal{O}(\Sigma)$ est l'ensemble des observables.

$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\Sigma)$ est l'ensemble des états.

Alors il doit exister :

(a) Un espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Sigma)$.

(C.2) $\mathcal{H}$ sera toujours un espace de Hilbert complexe séparable de dimension 1, 2, 3, ... ou ∞ ; $(.,.)$ est le produit scalaire dans $\mathcal{H}$, $||.||$ la norme de Hilbert.

(b) Une application θ de $\mathcal{H} - \{0\}$ dans $\mathcal{S}$. $\mathcal{S}_0 = : \theta(\mathcal{H} - \{0\})$ s'appelle ensemble des états purs.

On identifie l'ensemble $\mathcal{S}_0$ à $P(\mathcal{H})$, l'espace projectif déduit de $\mathcal{H}$.

(c) Une application $\square$ de $\mathcal{M}$ (= ensemble des opérateurs autoadjoints dans $\mathcal{H}$) sur $\mathcal{O}$.

- (d) De la donnée d'un état pur $\theta(\psi)$, $\psi \in \mathcal{H} - \{0\}$, et d'une observable $\Xi(A)$, $A \in \mathcal{M}$, on peut calculer :

$$w_{\Xi(A)}^{\theta(\psi)}([a, b]) = (E_b - E_a)\psi, \psi)$$

où $]a, b[\subset \mathbb{R}$ et $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est la famille spectrale de A ; cette quantité est la probabilité que la mesure de l'observable $\Xi(A)$, dans l'état $\theta(\psi)$ donne une valeur appartenant à $]a, b[$.

Quelques détails à propos de (b)

- i) Un RAYON est un sous-espace à une dimension de $\mathcal{H}$ privé de 0.
i.e. : si $\psi \in \mathcal{H} - \{0\}$, on obtient un rayon

$$\tilde{\phi} = \{ \lambda \phi \mid \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } \lambda \neq 0 \} \quad (1.1)$$

engendré par ϕ . L'ensemble de tous les rayons de $\mathcal{H}$ est l'ESPACE PROJECTIF $P(\mathcal{H})$ déduit de $\mathcal{H}$ [Bo.1]; i.e. : l'ensemble quotient de $\mathcal{H} - \{0\}$ par la relation d'équivalence :

$$R(\mathcal{H}) : \quad " \text{ il existe } \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{C} \text{ tq. } \psi = \lambda \phi \quad "$$

entre ϕ et ψ dans $\mathcal{H} - \{0\}$.

On souligne que $P(\mathcal{H})$ n'est pas un espace vectoriel, i.e. : il ne possède pas de structure linéaire, c'est simplement un ensemble de rayons.

- ii) L'application canonique $\omega : \mathcal{H} - \{0\} \longrightarrow P(\mathcal{H})$ envoie $\phi \in \mathcal{H} - \{0\}$ sur $\omega(\phi) = \tilde{\phi}$, où $\tilde{\phi}$ est donné par (1.1).
iii) On peut définir sur $P(\mathcal{H})$ une sorte de "produit scalaire", à savoir une application notée ω de $P(\mathcal{H}) \times P(\mathcal{H})$ dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$\omega(\phi), \omega(\psi) = \frac{|(\phi, \psi)|}{\|\phi\| \cdot \|\psi\|} \quad (1.2)$$

- a) A l'aide de cette application, on peut construire une fonction distance entre deux rayons; muni de cette fonction distance, $P(\mathcal{H})$ est un espace métrique complet [Ba.1].

b) L'interprétation physique de cette sorte de "produit scalaire" a une importance fondamentale : $(\omega(\phi), \omega(\psi))^2$ est la PROBABILITE de TRANSITION entre les états représentés par $\omega(\phi)$ et $\omega(\psi)$. Cela signifie que si le système considéré est dans l'état représenté par $\omega(\phi)$ (respectivement $\omega(\psi)$), alors $(\omega(\phi), \omega(\psi))^2$ est la probabilité de trouver le système dans l'état représenté par $\omega(\psi)$ (respectivement $\omega(\phi)$), après une expérience.

● Définition 1 : Une SYMETRIE de Wigner de $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ est une bijection $S : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$ préservant les probabilités de transition, i.e., telle que : $S\omega(\phi), S\omega(\psi) = \omega(\phi), \omega(\psi)$
 $\forall \phi, \psi \in \mathcal{H} - \{0\}$.

L'ensemble des symétries de Wigner n'est pas vide :

$\text{Id}_{\mathcal{P}(\mathcal{H})}$ est une symétrie de Wigner.

Si v est un opérateur unitaire ou antiunitaire dans $\mathcal{H}$, alors l'application

$$\tilde{v} : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H}) \text{ t.q. } \tilde{v}\omega(\phi) = \omega(v\phi), \forall \phi \in \mathcal{H} - \{0\} \quad (1.3)$$

est une symétrie de Wigner.

Rappel

Soit $\mathcal{H}'$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, $(.,.)'$ son produit scalaire.

Une application bijective $v : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ est

a) UNITAIRE si elle satisfait les conditions suivantes :

$$i) \quad v(\zeta\phi + \eta\psi) = \zeta v(\phi) + \eta v(\psi) \quad \forall \zeta, \eta \in \mathbb{C} \text{ et } \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}.$$

$$ii) \quad (v(\phi), v(\psi))' = (\phi, \psi) \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$$

b) ANTIUNITAIRE si elle satisfait les conditions suivantes :

$$i') \quad v(\zeta\phi + \eta\psi) = \bar{\zeta}v(\phi) + \bar{\eta}v(\psi) \quad \forall \zeta, \eta \in \mathbb{C} \text{ et } \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$$

$$ii') \quad (v(\phi), v(\psi))' = (\psi, \phi) \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$$

v est un opérateur unitaire (antiunitaire respectivement) dans $\mathcal{H}$ si $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$.

Muni de l'opération de composition d'applications, l'ensemble des symétries de Wigner de $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ forme un groupe.

Définir le groupe de symétrie du système physique Σ directement à l'aide des symétries de Wigner est embarrassant, car travailler avec un espace sans structure linéaire n'est pas commode. Nous allons voir comment le théorème de Wigner fournit un moyen de passer à $\mathcal{H}$.

Préliminaires

Soit $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ le groupe de tous les opérateurs unitaires dans $\mathcal{H}$, et $\mathcal{U}_A(\mathcal{H})$ l'ensemble de tous les opérateurs antiunitaires dans $\mathcal{H}$. Alors $\mathcal{U}_{UA}(\mathcal{H}) = \mathcal{U}(\mathcal{H}) \cup \mathcal{U}_A(\mathcal{H})$ muni de l'opération de composition d'applications est un groupe, appelé le groupe UNITAIRE-ANTIUNITAIRE (groupe-UA) de $\mathcal{H}$. Le groupe unitaire $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ est un sous-groupe normal de $\mathcal{U}_{UA}(\mathcal{H})$ d'indice 2, car le groupe quotient $\mathcal{U}_{UA}(\mathcal{H})/\mathcal{U}(\mathcal{H})$ ne possède que deux éléments. Pour le voir, on se souviendra que le produit de deux opérateurs unitaires, comme celui de deux antiunitaires, est unitaire, tandis que le produit d'un opérateur unitaire avec un antiunitaire est antiunitaire.

- Définition 2 : Soit $\mathbb{P}\mathcal{U}_{UA}(\mathcal{H})$ l'ensemble des applications bijectives $\tilde{v}: \mathbb{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$ définies par (1.3), où v est un opérateur unitaire ou antiunitaire dans $\mathcal{H}$. $\mathbb{P}\mathcal{U}_{UA}(\mathcal{H})$ est appelé le groupe PROJECTIF UNITAIRE-ANTIUNITAIRE (groupe PUA) de $\mathbb{P}(\mathcal{H})$.

$\mathcal{PU}_A(\mathcal{H})$ est un sous-groupe de $\mathcal{PGL}(\mathcal{H})$ (le groupe projectif de $\mathcal{P}(\mathcal{H})$); c'est aussi un sous-groupe du groupe des symétries de Wigner de $\mathcal{P}(\mathcal{H})$.

Considérons l'application suivante :

$$\Omega : \mathcal{U}_A(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{PU}_A(\mathcal{H}) \quad \text{définie par} \quad \Omega(v) = \tilde{v}$$

où $\tilde{v}$ est donné par (1.3). Ω est un homomorphisme de groupe surjectif et de noyau : $\text{Ker } \Omega = \{ \lambda \text{ Id}_{\mathcal{H}} \mid \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1 \}$.

On peut établir le résultat fondamental suivant :

Théorème 1 (de Wigner) : Le groupe des symétries de Wigner de $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ est exactement $\mathcal{PU}_A(\mathcal{H})$.

i.e. : chaque symétrie de Wigner de $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ a la forme $\Omega(v)$, où $v \in \mathcal{U}_A(\mathcal{H})$.

Démonstration : Voir réf. [Bar.2] et théorème 7.29 de la réf. [Va].

Cette dernière référence traite seulement le cas $\dim \mathcal{H} = \infty$ ■

Avant d'utiliser ce résultat nous allons munir l'espace projectif $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ et les groupes $\mathcal{U}_A(\mathcal{H})$ et $\mathcal{PU}_A(\mathcal{H})$ de topologies "naturelles" [Ca.1], afin de pouvoir travailler avec des représentations continues.

- i) La topologie de $\mathcal{H} - \{0\}$ est celle induite par la topologie de la norme de $\mathcal{H}$.
- ii) La topologie de $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ est le quotient de la topologie de $\mathcal{H} - \{0\}$ par la relation d'équivalence $R(\mathcal{H})$. i.e. : la topologie dont les ensembles ouverts sont les sous-ensembles A de $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ tels que $\omega^{-1}(A)$ soit un ouvert de $\mathcal{H} - \{0\}$.
- iii) Le groupe-UA de $\mathcal{H}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, l'ensemble de toutes les applications bornées de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Par conséquent, on peut donner à $\mathcal{U}_A(\mathcal{H})$ les topologies induites par celles de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Nous choisirons la topologie faible, qui est la moins fine qui rende les applications $A \longrightarrow (A\phi, \psi)$ de $B(\mathcal{H})$ dans $\mathbb{C}$ continues $\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$. (On souligne qu'en fait, sur $\mathcal{U}_{UA}(\mathcal{H})$, les topologies faible et forte coïncident.)

- iv) Le groupe-PUA de $\mathcal{H}$ est muni de la topologie finale pour Ω , qui est la plus fine qui rende Ω continue. Les ensembles ouverts de cette topologie sont les sous-ensembles A de $\mathcal{PU}_{UA}(\mathcal{H})$ tels que $\Omega^{-1}(A)$ soit un ouvert dans $\mathcal{U}_{UA}(\mathcal{H})$. Cette topologie permet de réaliser l'hypothèse, suggérée par les applications en théorie quantique, que toutes les probabilités de transitions varient continûment en fonction de l'élément de groupe ([Bar.1] p. 6), i.e., que $\omega(\phi) \cdot \tilde{v}(g) \cdot \omega(\psi)$ est une fonction continue de $g, g \in G$, quels que soient $\phi, \psi \in \mathcal{H} - \{0\}$ lorsque $\tilde{v}$ est une représentation projective continue unitaire-anti-unitaire de G sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ (voir définition 4).

(C.3) A l'exception des groupes $\mathcal{P}_{UA}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{U}_{UA}(\mathcal{H})$, avec $\dim \mathcal{H} = \infty$, qui ne sont pas localement compacts, tous les groupes topologiques que nous utiliserons dans ce travail seront toujours LOCALEMENT COMPACTS SEPARABLES (l.c.s.). (Séparable dans le sens qu'il y a toujours une base dénombrable pour les ensembles ouverts; localement compact dans le sens que chaque point a un voisinage compact.)

- Définition 3 : Soit G un groupe topologique. $\tilde{v}$ s'appelle GROUPE de SYMETRIE du système Σ , s'il existe un homomorphisme continu non trivial de G dans le groupe des symétries de Wigner de $\mathcal{P}(\mathcal{H})$. i.e. : si $\exists \tilde{u} : G \longrightarrow \mathcal{PW}_{UA}(\mathcal{H})$ (= groupe des symétries de Wigner de $\mathcal{P}(\mathcal{H})$) t.q.
 $\tilde{u}(g)\tilde{u}(g') = \tilde{u}(gg')$, $\forall g, g' \in G$ et $\tilde{u}$ continu
 ($\tilde{v}$ est trivial si $\tilde{u}(g) = Id_{\mathcal{P}(\mathcal{H})}$, $\forall g \in G$).

- Définition 4 : Une REPRESENTATION PROJECTIVE CONTINUE UNITAIRE-ANTI-UNITAIRE (rep. PCUA) de G sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ est un homomorphisme $\tilde{v}$ continu de G dans $\mathcal{PU}_{UA}(\mathcal{H})$. $\tilde{v}$ est unitaire quand son image est égale à $\Omega(\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ (rep. PCU).

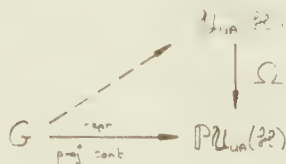
Donc, "un groupe (topologique) $\hat{G}$ s'appelle groupe de symétrie du système Σ , s'il existe une représentation projective (continue) unitaire-anti-unitaire non triviale de $\hat{G}$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ ". A l'aide de la théorie qui va être exposée dans le paragraphe suivant, §I.2. (point A), nous pouvons encore formuler cette définition d'une autre manière :

"un groupe (topologique) $\hat{G}$ s'appelle groupe de symétrie du système Σ s'il existe une représentation (borélienne) unitaire-antiunitaire à multiplicateur de $\hat{G}$ sur $\mathcal{H}$ ".

§I.2. RELEVEMENT DE REPRESENTATIONS PCUA D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE $\hat{G}$.

Problème : Une représentation projective continue d'un groupe topologique $\hat{G}$ sur l'espace projectif $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ n'est pas "linéaire" (ici et dans ce qui suit "linéaire" signifie linéaire quand la représentation projective continue est unitaire et antilinéaire quand la représentation projective continue est antiunitaire). On va essayer de surmonter cette difficulté en relevant notre "représentation" non linéaire sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ en une représentation linéaire sur $\mathcal{H}$.

A. Une première possibilité consiste à représenter le groupe $\hat{G}$ sur $\mathcal{H}$, en partant d'une représentation projective continue de $\hat{G}$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ et en utilisant l'application Ω décrite dans le §I.1.

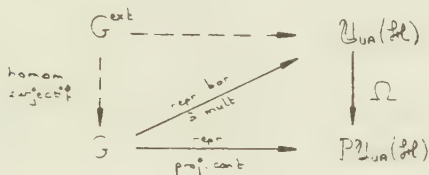


ce procédé nous fournit une "représentation" linéaire borélienne de $\hat{G}$ sur $\mathcal{H}$ (en pointillé sur le diagramme) à partir de laquelle on peut obtenir directement la représentation projective continue dont on est parti, via Ω .

Remarque 1 : Cette "représentation" linéaire n'est pas une représentation au sens habituel du terme, dû à la présence d'un facteur appelé multiplicateur.

Il est possible de se libérer du multiplicateur, en considérant un groupe plus grand.

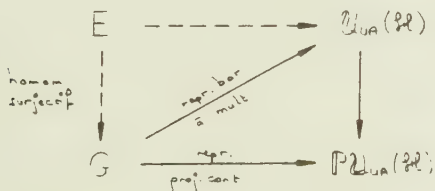
- B. Une deuxième possibilité suggère de partir d'une représentation borélienne à multiplicateur, de construire un groupe G^{ext} appelé extension de G , et de représenter G^{ext} sur $\mathcal{H}$.



Cela nous fournit une représentation au sens habituel du mot (donc linéaire) continue de G^{ext} sur $\mathcal{H}$, à partir de laquelle on peut trouver univoquement et directement la représentation projective continue correspondante de G sur $P(\mathcal{H})$.

Remarque 2 : Pour chaque classe d'équivalence de multiplicateurs de G , on doit définir un groupe G^{ext} , et tous ces groupes sont en général non isomorphes !

- C. La troisième possibilité consiste à partir d'une représentation borélienne à multiplicateur de G sur $\mathcal{H}$, à construire une certaine extension topologique E du groupe G , et à représenter E sur $\mathcal{H}$.



Cela nous fournit une représentation au sens habituel du terme (donc

linéaire) continue de $\mathbb{C}$ sur $\mathcal{H}$, à partir de laquelle on peut obtenir univoquement et directement la représentation projective continue correspondante de G sur $\mathbb{P}(\mathcal{H})$.

Remarque 3 : Un seul groupe $\mathbb{C}$ suffit, malheureusement il n'existe pas toujours !

Donc dans la recherche de l'ensemble des représentations PCUA d'un groupe topologique, après avoir fait le pas A, le choix de la méthode B ou C dépend du groupe considéré.

Développement des points A, B et C

A. Relèvement de chaque représentation PCUA d'un groupe topologique G en une représentation borélienne unitaire-antiunitaire à multiplicateur de G sur $\mathcal{H}$ (rep. BUAM).

C'est-à-dire : Soit G un groupe topologique.

- Définition 5 : (i) Une application borélienne v de G dans $\mathcal{U}_n(\mathcal{H})$ est dite une REPRÉSENTATION BORELIENNE UNITAIRE-ANTIUNITAIRE à MULTIPLICATEUR (rep. BUAM) de G sur $\mathcal{H}$ si $v(e_G) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$, et s'il existe une application borélienne $\mu : G \times G \rightarrow \mathcal{U}(1)$ (le MULTIPLICATEUR de v) telle que :

$$v(g)v(g') = \mu(g, g') v(gg') \quad \forall g, g' \in G$$
 $\mathcal{U}(1)$ est le groupe multiplicatif de tous les nombres complexes de module 1, muni de sa topologie canonique.
- (ii) Si $\mu(g, g') = 1 \quad \forall g, g' \in G$, alors v est dite REPRÉSENTATION BORELIENNE UNITAIRE-ANTIUNITAIRE (rep. BUA).
- (iii) Soit $N = \{g \in G ; v(g) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}$; N est un sous-groupe normal fermé de G , d'indice 1 ou 2. Quand l'indice vaut 1, $N = G$ et alors v est dite REPRÉSENTATION BORELIENNE UNITAIRE à MULTIPLICATEUR (rep. BUM).

● Définition 6 : Soit N un sous-groupe normal fermé de G , d'indice 1 ou 2. μ est un MULTIPLICATEUR RELATIVEMENT à G et N si :

$$\mu : G \times G \xrightarrow{\text{borel}} \mathcal{U}(1)$$

t.q. (i) $\mu(g, g')^{-1} (\Phi_N(g) \mu(g', g')) \mu(gg', g'')^{-1} \mu(g, gg'g'') = 1$
 $\forall g, g', g'' \in G.$

(ii) $\mu(e_G, g) = \mu(g, e_G) = 1 \quad \forall g \in G, \quad e_G$
 élément neutre de G .

où : Φ_N est une application de G dans $\text{Aut}(\mathcal{U}(1))$ définie par :

$$\Phi_N(g)z = \begin{cases} z & \text{si } g \in N \\ \bar{z} & \text{si } g \in G-N \end{cases} \quad \text{pour chaque } z \in \mathcal{U}(1) \text{ et } g \in G$$

L'ensemble des multiplicateurs relativement à G et N muni du produit $\mu(g, g') \mu'(g, g') = (\mu \mu')(g, g')$ est un groupe noté $Z_N(G)$.

$\mu, \mu' \in Z_N(G)$ sont dits SIMILAIRES s'il existe une application borélienne $\nu : G \xrightarrow{\text{borel}} \mathcal{U}(1)$ t.q.

$$\mu(g, g') = \mu'(g, g') \nu(g) (\Phi_N(g) \nu(g'))^{-1} \quad (*)$$

$$\forall g, g' \in G$$

On notera : $\mu = \mu' \bar{\nu}$ la relation (*).

$[\mu]$ la classe d'équivalence des multiplicateurs relativement à G et N équivalents à μ par (*)

$H_N(G)$ le groupe de ces classes d'équivalence.

$Z(G)$ et $H(G)$ pour ces groupes lorsque N est d'indice 1, i.e., $N = G$.

Remarque 4 : Mackey [Ma.1] a montré que pour un groupe l.c.s. on peut faire correspondre à chaque multiplicateur μ une représentation à multiplicateur.

- Définition 7 : Deux représentations PCUA, $\tilde{v}$ de G sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ et $\tilde{v}'$ de G sur $\mathcal{P}(\mathcal{H}')$, sont dites EQUIVALENTES s'il existe une application unitaire ou antiunitaire $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ telle que :

$$\tilde{V} \circ \tilde{v}(g) = \tilde{v}'(g) \circ \tilde{V} \quad \forall g \in G$$

où $\tilde{V}$ est l'application bijective de $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{H}')$ telle que $\tilde{V}(\omega(\phi)) = \omega'(V(\phi)) \quad \forall \phi \in \mathcal{H} - \{0\}$.

(ω' est le correspondant de ω pour $\mathcal{H}'$.)

Une représentation PUA $\tilde{v}$ de G sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ est dite IRREDUCTIBLE si $\mathcal{H}$ et $\{0\}$ sont les seuls sous-espaces de Hilbert $\mathcal{K}$ de $\mathcal{H}$ qui satisfont :

$$\tilde{v}(G)\omega(\mathcal{K} - \{0\}) = \omega(\mathcal{K} - \{0\})$$

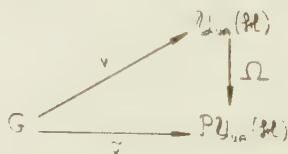
- Définition 8 : Deux représentations BUAM, v de G sur $\mathcal{H}$ et v' de G sur $\mathcal{H}'$, sont dites PSEUDOEQUIVALENTES s'il existe une application unitaire ou antiunitaire $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ et une application $\nu: G \xrightarrow{\text{bor}} \mathcal{U}(1)$ telles que :

$$\nu(g) V \circ v(g) = v'(g) \circ V \quad \forall g \in G$$

En particulier, elles sont dites EQUIVALENTES si $\nu(g) = 1 \quad \forall g \in G$ et SIMILAIRES si $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ et $V = \text{Id}_{\mathcal{H}}$.

Une représentation BUAM v de G sur $\mathcal{H}$ est dite IRREDUCTIBLE si $\mathcal{H}$ et $\{0\}$ sont les seuls sous-espaces de Hilbert $\mathcal{K}$ de $\mathcal{H}$ tels que $v(G)\mathcal{K} = \mathcal{K}$.

- Définition 9 : Une représentation BUAM v de G sur $\mathcal{H}$ est dite un RELEVEMENT BORELIEN de la représentation PCUA $\tilde{v}$ de G sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, si le diagramme suivant est commutatif.



i.e. : si $\Omega \circ v = \tilde{v}$

On notera : (i) $\mathcal{P}_{\text{CUA}}(G, \mathcal{H})$: l'ensemble de toutes les représentations PCUA de G sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$.

(ii) $\mathcal{M}_{\text{BUA}}(G, \mathcal{H})$: l'ensemble de toutes les représentations BUAM de G sur $\mathcal{H}$.

(iii) $\alpha : \mathcal{M}_{\text{BUA}}(G, \mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{P}_{\text{CUA}}(G, \mathcal{H})$

$$v \longmapsto \Omega \cdot v$$

Cette application est compatible avec la relation d'équivalence R_1 définie dans $\mathcal{M}_{\text{BUA}}(G, \mathcal{H})$ par similarité des représentations BUAM (définition 7), i.e. : si $v, v' \in \mathcal{M}_{\text{BUA}}(G, \mathcal{H})$ sont similaires, alors $\alpha(v) = \alpha(v')$.

(iv) $\alpha' : \mathcal{M}_{\text{BUA}}(G, \mathcal{H}') \longrightarrow \mathcal{P}_{\text{CUA}}(G, \mathcal{H}')$ ayant la propriété (iii).

Proposition 1

- (i) Chaque élément de $\mathcal{M}_{\text{BUA}}(G, \mathcal{H})$ est le relèvement borélien d'un élément de $\mathcal{P}_{\text{CUA}}(G, \mathcal{H})$; réciproquement, chaque élément de $\mathcal{P}_{\text{CUA}}(G, \mathcal{H})$ admet un relèvement borélien.
- (ii) Si deux représentations BUAM de G sur $\mathcal{H}$, v et v' (μ et μ' leur multiplicateur respectif et $N = \{g \in G ; v(g) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\} = \{g \in G ; v'(g) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}$) sont similaires, et si leur similarité est établie par une application $u : G \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}(1)$ t.q. $v(g) = u(g)v'(g) \quad \forall g \in G$, alors : $\mu = \mu' \cdot \delta u$
- (iii) $v \in \mathcal{M}_{\text{BUA}}(G, \mathcal{H})$ et $v' \in \mathcal{M}_{\text{BUA}}(G, \mathcal{H}')$ sont pseudoéquivalentes (respectivement similaires) ssi $\alpha(v) \in \mathcal{P}_{\text{CUA}}(G, \mathcal{H})$ et $\alpha'(v') \in \mathcal{P}_{\text{CUA}}(G, \mathcal{H}')$ sont équivalentes (respectivement égales). $v \in \mathcal{M}_{\text{BUA}}(G, \mathcal{H})$ est irréductible ssi $\alpha(v) \in \mathcal{P}_{\text{CUA}}(G, \mathcal{H})$ est irréductible.
- (iv) L'application $\alpha_1 : \mathcal{M}_{\text{BUA}}(G, \mathcal{H})/R_1 \longrightarrow \mathcal{P}_{\text{CUA}}(G, \mathcal{H})$ déduite de α en passant au quotient est bijective.

Démonstration : Voir réf. [Ca.1]. Nous développerons seulement le point (i) car il nous donne la construction explicite des représentations.

Soit v une représentations BUAM de G sur $\mathcal{H}$; alors $\tilde{v} =: \Omega \cdot v$ est une représentation PCUA de G sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$. Inversément, étant donné $\tilde{v}$, soit $\square$ une section borélienne normalisée associée à Ω , i.e. : $\square$ est une application borélienne de $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ dans $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{H})$ telle que :

$$a) \quad \Omega \cdot \square = \text{Id}_{\mathcal{P}(\mathcal{H})} \quad \text{et}$$

$$b) \quad \square(\Omega(\text{Id}_{\mathcal{H}})) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$$

L'existence de $\square$ est assurée par l'axiome du choix et un lemme de Dixmier [Dix.]. L'application $v = \square \cdot \tilde{v}$ est un relèvement borélien de $\tilde{v}$, i.e. : il existe une application $\mu : G \times G \rightarrow \mathcal{U}(1)$ telle que $v(g_1 g_2) = \mu(g_1, g_2) v(g_1) v(g_2)$ $\forall g_1, g_2 \in G$.

On souligne ici que le choix d'une autre section normalisée associée à $\Omega : \square'$ conduit, par la construction ci-dessus, à $v' = \square' \cdot \tilde{v}$ (un relèvement borélien de $\tilde{v}$) ; v et v' ainsi construites sont similaires ■

B. Cette méthode consiste à partir des représentations BUAM de G sur $\mathcal{H}$, à construire un groupe topologique $G_N^{[N]}$, extension topologique de G par $\mathcal{U}(1)$, pour chaque classe d'équivalence de multiplicateurs $[\mu]$, où N est un sous-groupe fixé fermé normal de G d'indice 1 ou 2 forme des éléments de G représentés par des opérateurs unitaires, et à relever chaque représentation BUAM de G (une par classe $[\mu]$) en une représentation continue unitaire-antiunitaire (rep. CUA) ordinaire de $G_N^{[N]}$.

C'est-à-dire : Soit G un groupe topologique, et K un groupe topologique abélien.

● Définition 10 : Un SYSTÈME DE FACTEURS borélien de G à valeurs dans K_Ψ est une application borélienne $\mathfrak{f} : G \times G \longrightarrow K$ telle que :

$$(i) \mathfrak{f}(g, g')^{-1} (\Psi(g) \mathfrak{f}(g', g')) (\mathfrak{f}'(g g', g))^{-1} (\mathfrak{f}'(g', g g')) = e_K$$

(élément neutre de K) $\forall g, g', g'' \in G$.

$$(ii) \mathfrak{f}(g, e_G) = \mathfrak{f}(e_G, g) = 1 \quad \forall g \in G, \quad e_G \text{ élément neutre de } G.$$

Ici Ψ est une action topologique de G sur K (i.e. : $\Psi : G \longrightarrow \text{Aut}(K)$ telle que $(\pi, g) \longmapsto \Psi(g; \pi)$ soit une application globalement continue de $K \times G$ dans K); K muni de Ψ est un G -module topologique, noté K_Ψ .

L'ensemble des systèmes de facteurs boréliens de G à valeurs dans K_Ψ , muni du produit ponctuel, est un groupe noté $Z(G, K_\Psi)$.

$\mathfrak{f}, \mathfrak{f}' \in Z(G, K_\Psi)$ sont dits SIMILAIRES s'il existe une application borélienne $\mu : G \longrightarrow K$ telle que :

$$\mathfrak{f}(g, g') = \mathfrak{f}'(g, g') \mu(g) (\Psi(g) \mu(g'))^{-1} \quad \forall g, g' \in G \quad (**)$$

On notera : $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}' \delta \mu$ la relation (**).

$[\mathfrak{f}]$ la classe d'équivalence des systèmes de facteurs boréliens de G à valeurs dans K_Ψ équivalents à $\mathfrak{f}$ par (**).

$H(G, K_\Psi)$ le groupe de ces classes.

Remarque 5 : Dans le cas particulier où $K = \mathbb{U}(1)$ et $\Psi = \overline{\Phi}_N$

$$Z(G, K_\Psi) = Z_N(G) \quad \text{et} \quad H(G, K_\Psi) = H_N(G) \quad (\text{déf. 6}).$$

● Définition 11 : Une suite exacte $1 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\mathcal{S}} G \cong E/K \longrightarrow 1$ s'appelle EXTENSION TOPOLOGIQUE de G par K , notée aussi $(E, \mathcal{S})$.

(ι = injection canonique, $\text{Ker } \mathcal{S} = K$, $\mathcal{S}$ continue est ouverte et surjective).

On appelle aussi E extension topologique de G par K .

Soit Σ une section borélienne normalisée associée à $\mathcal{S}$

$$E \xrightarrow{\mathcal{S}} G \cong E/K$$

$$\xleftarrow[\Sigma]{} K$$

- On peut définir une action et un système de facteurs défini par Σ

$$\Psi : G \longrightarrow \text{Aut}(K) \text{ définie par } \Psi(g)k = \Sigma(g)k \Sigma(g)^{-1}$$

est une action topologique de G sur K .

$$\mathfrak{f}_{\Sigma} : G \times G \longrightarrow K \text{ définie par } \mathfrak{f}_{\Sigma}(g, g') = \Sigma(g) \Sigma(g') \Sigma(gg')^{-1}$$

est un élément de $Z(G, \Psi)$ qu'on dit associé à Σ .

Puisque l'action Ψ est indépendante du choix de la section (c'est pourquoi elle n'est pas indicée par Σ) nous noterons encore $(E, \mathcal{S})$ l'extension topologique de G par K_{Ψ} .

- Considérons l'ensemble des couples (k, g) avec $k \in K$, $g \in G$, muni du produit

$$(k, g)(k', g') = (k(\Psi(g)k'))\mathfrak{f}(g, g'), gg')$$

où $\mathfrak{f}$ est un système de facteurs de G à valeurs dans K_{Ψ} , c'est un groupe. (e_K, e_G) est son élément neutre; $(k, g)^{-1} = (\Psi(g)^{-1}(k\mathfrak{f}(g, g^{-1})))^{-1}, g^{-1}) \forall k \in K, \forall g \in G$. Il existe une topologie essentiellement unique qui rend ce groupe localement compact séparable. On notera ce groupe topologique $(K_{\Psi} | \mathfrak{f} | G)$.

Lien entre le groupe $(K_\Psi | G)$ et l'extension topologique $(E, \mathcal{S})$ de G par K_Ψ

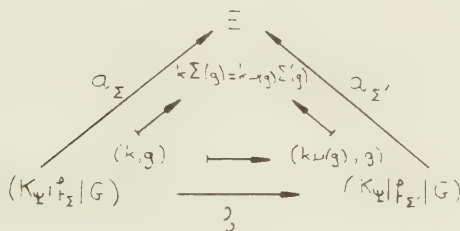
Soit Σ une section borélienne normalisée associée à $\mathcal{S}$. Tout élément $x \in E$ pouvant s'écrire de manière unique $k\Sigma(q)$ avec $k \in K$ et $q = \mathcal{S}(x) \in G$, l'application $(k, q) \xrightarrow{\alpha_\Sigma} k\Sigma(q)$ est un isomorphisme borélien de $(K_\Psi | \mathcal{F}_\Sigma | G)$ sur E t.q. $\mathcal{S} \circ \alpha_\Sigma = \text{pr}_1$. α_Σ est topologique par le th. 4 Ch. I de [Ban.].

Que nous donne le choix d'une autre section ?

Soit Σ' une section borélienne normalisée associée à $\mathcal{S}$. On a : $\mathcal{S} \circ \Sigma = \text{id}_G$ et $\mathcal{S} \circ \Sigma' = \text{id}_G$; i.e. : $\mathcal{S}(\Sigma(q)) = \mathcal{S}(\Sigma'(q)) = q, \forall q \in G$; donc $\Sigma(q)$ et $\Sigma'(q)$ diffèrent d'un élément de $K = \text{Ker } \mathcal{S}$. Il existe $\nu : G \xrightarrow{\text{iso}} K$ telle que :

$$\Sigma(q) = \nu(q) \Sigma'(q)$$

On en déduit que $\mathcal{F}_\Sigma = \mathcal{F}_{\Sigma'}$, $\mathcal{S}\nu$ et que le diagramme suivant est commutatif :



$\alpha_\Sigma, \alpha_{\Sigma'}$ et $\mathcal{S}$ sont des isomorphismes de groupes topologiques.

- Définition 12 : Soit N un sous-groupe normal fermé de G , d'indice 1 ou 2, et μ un multiplicateur relativement à G et N . Le groupe $(\mathcal{U}(1)_N | \mu | G)$ s'appelle la μ -EXTENSION de G , on la note G_N^μ . On identifie $\mathcal{U}(1)$ à $\mathcal{U}(1) = \{e_G\}$ via l'application $\mathcal{S} \mapsto (\mathcal{S}, e_G)$. Si N est d'indice 1, i.e. : $N = G$, alors $\mathcal{F}_N$ est l'opération triviale et la μ -extension de G est notée G^μ .

- Définition 13 : Soit N un sous-groupe normal fermé d'indice 1 ou 2 de G , et μ un multiplicateur relativement à G et N . Soit w une représentation continue unitaire-antiunitaire (rep. CUA) de G_N^μ sur $\mathcal{H}$; i.e. :

$$w : G_N^\mu \longrightarrow \mathcal{U}_{\mu} \mathcal{H}, \quad \text{t.q.} \quad w(\{z, z'\} \{y, y'\}) = w^{1/2}(z, y) w^{1/2}(z', y')$$

$$\forall z, z' \in \mathcal{U}(1), \quad \forall y, y' \in G$$

w est dite $\mathcal{U}(1)$ -SEPARANTE si $w(\{z, e_G\}) = z \text{Id}_{\mathcal{H}}, \forall z \in \mathcal{U}(1)$.

- Définition 14 : Soit N un sous-groupe normal fermé d'indice 1 ou 2 de G , μ et μ' des multiplicateurs relativement à G et N . Deux représentations CUA $\mathcal{U}(1)$ -séparantes w de G_N^μ sur $\mathcal{H}$ et w' de $G_N^{\mu'}$ sur $\mathcal{H}'$ sont dites PSEUDOEQUIVALENTES s'il existe une application unitaire ou antiunitaire $V : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ et une application $\xi : \mathcal{U}(1) \times G \longrightarrow \mathcal{U}(1)$ telles que :

$$\xi(z, z') \cdot w(z, z') = w'(z, z') \cdot V \quad \forall (z, z') \in \mathcal{U}(1) \times G$$

Elles sont dites SIMILAIRES si $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ et $V = \text{Id}_{\mathcal{H}}$.

Une rep. CUA $\mathcal{U}(1)$ -séparante de G_N^μ sur $\mathcal{H}$ est dite IRREDUCTIBLE si $\mathcal{H}$ et $\{0\}$ sont les seuls sous-espaces de Hilbert $\mathcal{K}$ de $\mathcal{H}$ tels que $w(G_N^\mu)\mathcal{K} = \mathcal{K}$.

On notera :

- (i) $\mathcal{U}_{\text{CUA}}(G_N^\mu, \mathcal{H})$: l'ensemble de toutes les représentations CUA $\mathcal{U}(1)$ -séparantes de G_N^μ sur $\mathcal{H}$.

$$\mathcal{U}_{\text{CUA}}(G, \mathcal{H}) = \bigcup_{N, \mu} \mathcal{U}_{\text{CUA}}(G_N^\mu, \mathcal{H})$$

réunion sur tous les sous-groupes normaux fermés N de G d'indice 1 ou 2, et sur tous les μ multiplicateurs.

$$(11) \quad \beta : \mathcal{U}_{\text{CUA}}(G, \mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{U}_{\text{CUA}}(G, \mathcal{H}) \quad \text{t.q.}$$

$$\beta(v)(z, y) = z \cdot v(y), \quad \forall (z, y) \in \mathcal{U}(1) \times G, \quad v \in \mathcal{U}_{\text{CUA}}(G, \mathcal{H})$$

β est compatible avec la relation d'équivalence

On notera :

(suite)

R_1 définie dans $\mathcal{U}_{\text{cua}}(G, \mathcal{H})$ par similarité (définition 14), i.e. : si $v, v' \in \mathcal{M}_{\text{bua}}(G, \mathcal{H})$ sont similaires, alors $\beta(v)$ et $\beta(v')$ sont similaires dans $\mathcal{U}_{\text{cua}}(G, \mathcal{H})$.

$$(iii) \quad \beta' : \mathcal{M}_{\text{bua}}(G, \mathcal{H}') \longrightarrow \mathcal{U}_{\text{cua}}(G, \mathcal{H}')$$

ayant la propriété (ii).

Proposition 2

- (i) A chaque élément $v \in \mathcal{M}_{\text{bua}}(G, \mathcal{H})$, (μ le multiplicateur et $N = \{g \in G, v(g) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}$), on peut faire correspondre un élément w de $\mathcal{U}_{\text{cua}}(G, \mathcal{H})$, ($w : G_N^r \longrightarrow \mathcal{U}_{\text{cua}}(\mathcal{H})$ envoyant (j, g) sur $w(j, g) = j \cdot v(g)$).

Réciproquement, soient N un sous-groupe normal fermé d'indice 1 ou 2 de G , $\mu \in \mathbb{Z}_N(G)$ et $w \in \mathcal{U}_{\text{cua}}(G_N^r, \mathcal{H})$, alors l'application $v : G \longrightarrow \mathcal{U}_{\text{bua}}(\mathcal{H})$ envoyant g sur $v(g) = w(1, g)$ appartient à $\mathcal{M}_{\text{bua}}(G, \mathcal{H})$ (μ le multiplicateur et $\{g \in G, v(g) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\} = N$).

- (ii) Deux représentations $w \in \mathcal{U}_{\text{cua}}(G_N^r, \mathcal{H})$ et $w' \in \mathcal{U}_{\text{cua}}(G_N^r, \mathcal{H})$ sont similaires, si μ et μ' le sont.

Pour chaque $\nu : G \xrightarrow{\text{sur}} \mathcal{U}(1)$, l'application

$$\tau_\nu : \mathcal{U}_{\text{cua}}(G_N^r, \mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{U}_{\text{cua}}(G_N^r, \mathcal{H}) \text{ définie par : } \tau_\nu(w)(j, g) = \nu(j) \cdot w(j, g)$$

$w \in \mathcal{U}_{\text{cua}}(G_N^r, \mathcal{H})$ et $(j, g) \in G_N^r$, est bijective.

Pour $\mu, \mu' \in [\mu]$, les groupes G_N^r et G_N^r sont dits similaires; ils sont topologiquement isomorphes.

- (iii) $v \in \mathcal{M}_{\text{bua}}(G, \mathcal{H})$ et $v' \in \mathcal{M}_{\text{bua}}(G, \mathcal{H}')$ sont pseudoéquivalentes (respectivement similaires) ssi $\beta(v) \in \mathcal{U}_{\text{cua}}(G, \mathcal{H})$ et $\beta(v') \in \mathcal{U}_{\text{cua}}(G, \mathcal{H}')$ sont pseudoéquivalentes (respectivement similaires).

$v \in \mathcal{M}_{\text{bua}}(G, \mathcal{H})$ est irréductible ssi $\beta(v) \in \mathcal{U}_{\text{cua}}(G, \mathcal{H})$ est irréductible.

- (iv) L'application $\beta_1 : \mathcal{M}_{\text{bua}}(G, \mathcal{H}) / R_1 \longrightarrow \mathcal{U}_{\text{cua}}(G, \mathcal{H}) / R_1$ déduite de β en passant aux quotients est bijective.

Démonstration : Voir réf. [Ca.1] ■

N.B. On note $G_N^{[\mu]}$ un représentant de la classe de similarité $\{G_N^{[\mu]} \mid \mu \in [\mu]\}$.

C. La troisième manière de relever toutes les représentations PCUA de G , ayant le même sous-groupe N d'éléments représentés dans le groupe projectif unitaire, consiste à construire un groupe topologique E_N dit séparant = "splitting group" (respectivement de représentation), extension topologique de G par un groupe topologique abélien K , et à considérer ses représentations CUA-séparantes.

C'est-à-dire : Soit G un groupe topologique et K un groupe topologique abélien.

● Définition 15 : Un CARACTERE χ de K est un homomorphisme continu du groupe K dans $\mathcal{U}(1)$. On note $\hat{K}$ le groupe abélien des caractères de K , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de K .

● Définition 16 : Un groupe topologique E_N est dit GROUPE SEPARANT (respectivement de REPRESENTATION) pour (G, N) si :

(i) il existe un homomorphisme continu S de E_N sur G tel que (E_N, S) soit une extension topologique de G par K_N , où φ_N est une action topologique de G sur K définie par :

$$\varphi_N(g)k = \begin{cases} k & \text{si } g \in N \\ k^{-1} & \text{si } g \in G-N \end{cases} \quad \text{pour chaque } k \in K \text{ et } g \in G$$

(ii) étant donnée une section Σ borélienne normalisée associée à S , l'homomorphisme de groupe

$$\gamma: \hat{K} \longrightarrow H_N(G) \text{ envoyant } \chi \text{ sur } [\chi \cdot \varphi_\Sigma], \text{ où}$$

$\varphi_\Sigma \in Z(G, K_\Sigma)$ est le système de facteurs défini par Σ , est surjectif (respectivement bijectif).

- Définition 16 : Dans ce cas, l'application ouverte continue $\mathcal{S}$ est appelée (suite) la PROJECTION SEPARANTE de E_N (sur G), l'application Σ une SECTION SEPARANTE de E_N associée à $\mathcal{S}$, et K le NOYAU SEPARANT de E_N .

Si N est d'indice 1, on dit simplement que $E_{N=G}$ est un groupe séparant (respectivement de représentation) pour G .

- Définition 17 : Soit E_N un groupe séparant pour (G, N) de projection séparante $\mathcal{S}$. Une représentation CUA π de E_N sur $\mathcal{H}$ est dite SEPARANTE s'il existe $\chi_\pi \in (\text{Ker } \mathcal{S})^\wedge$ t.q.
 $\pi(k) = \chi_\pi(k) \cdot \text{Id}_{\mathcal{H}}$, $\forall k \in \text{Ker } \mathcal{S}$.

- Définition 18 : Deux représentations CUA π sur $\mathcal{H}$ et π' sur $\mathcal{H}'$ d'un groupe séparant E_N pour (G, N) sont dites PSEUDO-EQUIVALENTES s'il existe une application unitaire ou antiunitaire $V: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ et une application $\nu: E_N \longrightarrow \mathcal{U}(1)$ t.q. $\nu(x)V \cdot \pi(x) = \pi'(x) \cdot V$, $\forall x \in E_N$. Elles sont dites EQUIVALENTES si $\nu(x) = 1 \quad \forall x \in E_N$, et SIMILAIRES si $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ et $V = \text{Id}_{\mathcal{H}}$. π est dite IRREDUCTIBLE si $\mathcal{H}$ et $\{0\}$ sont les seuls sous-espaces de Hilbert $\mathcal{K}$ de $\mathcal{H}$ tels que $\pi(E_N)\mathcal{K} = \mathcal{K}$.

On notera :

- (i) $\mathcal{Z}_{\text{CUA}}^s(E_N, \mathcal{S}^{-1}(N), \mathcal{H})$: l'ensemble de toutes les représentations π CUA-séparantes de E_N sur $\mathcal{H}$ avec $\{k \in \Sigma(q) \mid \pi(k \Sigma(q)) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\} = \mathcal{S}^{-1}(N)$.
- (ii) $\mathcal{P}_{\text{CUA}}(G, N, \mathcal{H})$: l'ensemble de toutes les représentations CUAP $\tilde{\nu}$ de G sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ avec $\{g \in G \mid \tilde{\nu}(g) \in \Omega(\mathcal{U}(\mathcal{H}))\} = N$.
- (iii) $\eta: \mathcal{Z}_{\text{CUA}}^s(E_N, \mathcal{S}^{-1}(N), \mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{P}_{\text{CUA}}(G, N, \mathcal{H})$
 $\pi \longmapsto \eta(\pi) =: \Omega \circ \pi \circ \Sigma$

L'application η est indépendante du choix de la section et est compatible avec la relation d'équivalence R_3 définie dans $\mathcal{Z}_{\text{CUA}}^s(E_N, \mathcal{S}^{-1}(N), \mathcal{H})$ par similarité des représentations CUA-séparantes (déf. 18).

Proposition 3

Soit E_N un groupe séparant pour (G, N) de projection séparante $\mathcal{S}$ et Σ une section séparante associée à $\mathcal{S}$.

- (i) Pour chaque élément $\tilde{v}$ de $\mathcal{P}_{\text{cua}}(G, N, \mathcal{H})$ on peut trouver un relèvement borélien (localement continu) v de $\tilde{v}$ et un élément $\chi \in (\text{Ker } \mathcal{S})^\wedge$ t.q. l'application $\pi: E_N \longrightarrow \mathcal{U}_{\text{UA}}(\mathcal{H})$ définie par :

$$\pi(k \Sigma(g)) = \chi(k) v(g)$$

soit un élément de $\mathcal{Z}_{\text{cua}}^f(E_N, \mathcal{S}^{-1}(N), \mathcal{H})$.

Réciproquement : soit $\pi \in \mathcal{Z}_{\text{cua}}^f(E_N, \mathcal{S}^{-1}(N), \mathcal{H})$, alors l'application $\tilde{v} =: \Omega \circ \pi \circ \Sigma \in \mathcal{P}_{\text{cua}}(G, N, \mathcal{H})$.

- (ii) $\pi \in \mathcal{Z}_{\text{cua}}^f(E_N, \mathcal{S}^{-1}(N), \mathcal{H})$ et $\pi' \in \mathcal{Z}_{\text{cua}}^f(E_N, \mathcal{S}^{-1}(N), \mathcal{H}')$ sont pseudoéquivalentes (respectivement similaires) ssi $\eta(\pi)$ et $\eta(\pi')$ sont équivalentes (respectivement égales).

$\pi \in \mathcal{Z}_{\text{cua}}^f(E_N, \mathcal{S}^{-1}(N), \mathcal{H})$ est irréductible ssi $\eta(\pi)$ est irréductible.

- (iii) L'application

$$\eta_1: \mathcal{Z}_{\text{cua}}^f(E_N, \mathcal{S}^{-1}(N), \mathcal{H}) / R_3 \longrightarrow \mathcal{P}_{\text{cua}}(G, N, \mathcal{H})$$

déduite de η en passant au quotient, est bijective.

Démonstration : Voir réf. [Ca.2] ■

Il nous reste à introduire encore un certain nombre de concepts, afin de pouvoir établir l'EXISTENCE d'un groupe de représentation (donc à fortiori d'un groupe séparant) pour (G, N) .

Soit G, N et p la projection canonique de $Z_N(G)$ sur $H_N(G)$.

- Définition 19 : Un SELECTEUR relativement à G et N est une section borélienne normalisée associée à p qui est un homomorphisme :

$$Z_N(G) \xrightleftharpoons[p]{p} H_N(G)$$

Donc $s(H_N(G))$ est un sous-groupe de $Z_N(G)$.

- Définition 20 : Soit s un sélecteur relativement à G et N . On appelle FONCTION EVALUATION l'application :

$$ev^s : G \times G \longrightarrow \text{Hom}(s(H_N(G)), \mathbb{Q}(1))$$

définie par

$$ev^s(g, g')(s[\mu]) = s([\mu])(g, g')$$

$$g, g' \in G \text{ et } \mu \in Z_N(G)$$

Proposition 4 (EXISTENCE d'un groupe de représentation)

Soit G un groupe topologique, N un sous-groupe fermé normal d'indice 1 ou 2 de G .

- (i) Soit s un sélecteur relativement à G et N , tel que nous puissions munir $s(H_N(G))^\wedge$ d'une topologie de groupe l.c.s., de sorte que φ_N soit une action topologique de G sur $s(H_N(G))^\wedge$, et tel que $ev^s(q, q')$ soit continue $\forall q, q' \in G$ (i.e. : $ev^s(q, q') \in s(H_N(G))^\wedge$).

Alors : ev^s est un système de facteurs borélien de G à valeurs dans $s(H_N(G))_{\varphi_N}^\wedge$ et le groupe $(s(H_N(G))_{\varphi_N}^\wedge | ev^s ; G)$ est un groupe de représentation pour (G, N) , de projection séparante p_{r_1} et de section séparante

$$\Sigma : q \longrightarrow (e_{s(H_N(G))^\wedge}, \varphi)$$

associée à p_{r_1} ; $(e_{s(H_N(G))^\wedge})$ est l'élément neutre de $s(H_N(G))^\wedge$.

- (ii) Si $H(G, R_{\varphi_N})$ est isomorphe au groupe additif R^n ($n \geq 0$) et si l'homomorphisme de groupe $\gamma : H(G, R_{\varphi_N}) \longrightarrow H_N(G)$ envoyant $[\gamma]$ sur $[e]$ a un noyau (= : $\ker \gamma$) fermé dans la topologie canonique et un conoyau (Coker γ = : $H_N(G) / \text{Im } \gamma$) dénombrable, alors il existe un groupe de représentation $(s(H_N(G))_{\varphi_N}^\wedge | ev^s | G)$ pour (G, N) .

- (iii) Si aux conditions du point (ii) on ajoute le fait que le groupe des homomorphismes continus de G dans $\mathcal{U}(A)_{\mathbb{Z}_N}$ doit être isomorphe à un groupe divisible (i.e. : dont les éléments sont divisibles), alors : si E_N, E'_N sont deux groupes de représentations pour (G, N) , de projection séparante $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ respectivement, il existe un isomorphisme de groupes topologiques δ de E'_N sur E_N t.q. $\mathcal{S} \circ \delta = \mathcal{S}'$.

i.e. : on a unicité du groupe de représentation, à isomorphisme près.

Démonstration : Voir réf. [Ca.2] pour les points (i) et (ii), réf. [Ca.3] pour (iii) ■

Remarque 6 : On souligne que les hypothèses sur le groupe topologique G faites sous (ii) sont satisfaites pour la plupart des groupes utilisés en physique, par exemple : le groupe de Poincaré, le groupe de Lorentz, les groupes de Heisenberg, $SO(3)$, $SU(2)$, etc.

Citons un exemple de groupe localement compact séparable qui ne possède pas de groupe séparant : le groupe topologique produit

$$\mathbb{R} \times \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}_j \right) \quad \text{où} \quad \mathbb{Z}_j = \mathbb{Z} \quad \forall j = 1, 2, \dots, \infty$$

(voir référence [Mo.], pp. 85 - 86).

Remarque 7 : Soit G_0 la composante connexe de l'identité e_G du groupe G . On peut voir que la restriction d'une représentation PCUA de G à G_0 est toujours une représentation PCU de G_0 . (C.4) Dans la suite, les groupes considérés seront connexes.

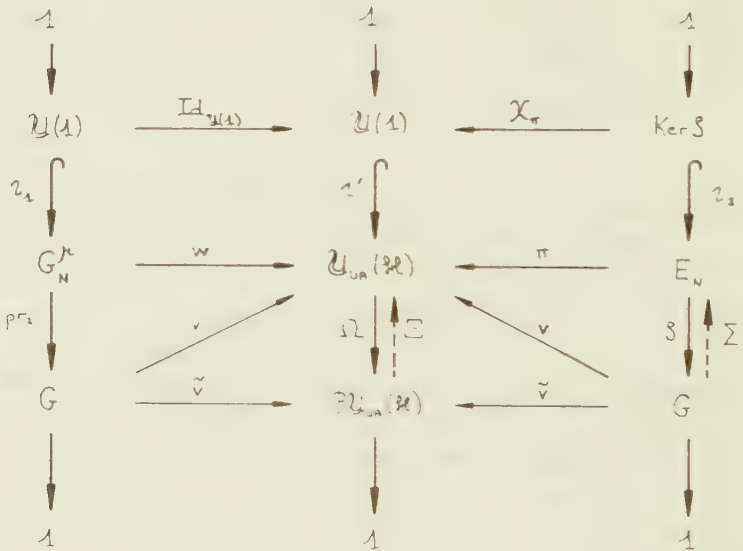
Remarque 8 : Certains groupes intéressants en physique, par exemple $SU(2)$, ne possèdent que des représentations BUM à multiplicateur trivial donc similaires à des représentations CU; il existe un critère de Bargmann [Bar.1], [Si] pour reconnaître quand un groupe est son propre groupe de représentation. En particulier, tous les groupes de Lie semi-simples simplement connexes satisfont ce critère.

Remarque 9 : Dans beaucoup de cas, par exemple pour le groupe des rotations, le groupe de Lorentz et celui de Poincaré, les représentations PCU du groupe peuvent être relevées en des représentations CU (ordinaires) de leur groupe de recouvrement universel (i.e., le groupe de recouvrement universel est un groupe de représentation). C'est aussi vrai pour tous les groupes connexes compacts.

Conclusion

On peut résumer les résultats obtenus par les méthodes A, B et C de la manière suivante :

L'étude des représentations PCUA d'un groupe topologique G sur $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ peut être transformée en un problème plus simple, celui d'étudier les représentations d'un groupe lié à G sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Les transformations possibles se trouvent dans le diagramme commutatif suivant, établi à l'aide des propositions 1, 2 et 3.



où : i_1 est l'injection $\mathfrak{z} \mapsto (\mathfrak{z}, e_G)$

i_2 est l'injection canonique

i' est l'injection $\mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{z} \text{ Id}_{\mathcal{H}}$

χ_π comme dans la définition 17

pr_1 est la projection sur la deuxième composante

Ω est une section borélienne normalisée associée à Ω

s est la projection séparante de E_N , liée à (G, N)

Σ est une section séparante de E_N associée à S , comme dans la définition 16.

On met en évidence la différence entre les parties gauche (méthode A, puis B) et droite (méthode A, puis C) du diagramme : à gauche, nous devons considérer toutes les représentations CUA $\mathcal{U}(L)$ -séparantes sur $\mathcal{H}$ de tout un ensemble de groupes topologiques, les $G_N^{[r]}$, r parcourant $\mathbb{Z}_v(G)$ et N un sous-groupe fermé normal d'indice 1 ou 2 de G , pour obtenir toutes les représentations PCUA $\tilde{v}$ de G sur $P(\mathcal{H})$ t.q. $\tilde{v}(g) \in \Omega(\mathcal{U}(\mathcal{H})) \quad \forall g \in N$. A droite, les représentations CUA-séparantes d'un seul groupe, E_N , nous suffisent, MAIS ce groupe n'existe pas toujours !

(Conditions d'existence suffisantes données par la proposition 4(ii).)

§1.3. GROUPE DE SYMETRIE DYNAMIQUE D'UN SYSTEME PHYSIQUE ET CONSTANTES DU MOUVEMENT

Rappelons d'abord brièvement comment les groupes dynamiques de systèmes quantiques sont reliés aux groupes unitaires boréliens à un paramètre et aux opérateurs autoadjoints.

(Les notations utilisées par la suite et non spécifiées sont celles introduites dans les paragraphes précédents.)

- a) Le développement au cours du temps d'un système quantique fermé est décrit par une application $\tilde{v}(t): \mathcal{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$ possédant les propriétés suivantes [Jo.]; $t, t' \in \mathbb{R}$
- (1) $\tilde{v}(t)$ est surjective
 - (2) $\tilde{v}(t)\omega(\phi) \cdot \tilde{v}(t)\omega(\psi) = \omega(\phi) \cdot \omega(\psi) \quad \phi, \psi \in \mathcal{H} - \{0\} \quad (\text{i.e. : isométrique})$
 - (3) $\tilde{v}(t)\omega(\phi)$ est une fonction continue de t , quel que soit $\phi \in \mathcal{H} - \{0\}$
 - (4) $\tilde{v}(t)\tilde{v}(t') = \tilde{v}(t+t')$

Si le système est dans l'état $\omega(\phi)$ en $t=0$, on note

$$\omega(\phi)(t) = \tilde{v}(t)\omega(\phi)$$

l'état du système au temps t .

Remarque 10 : Lorsque le système quantique considéré n'est pas fermé, les opérateurs décrivant l'évolution du système au cours du temps agissent dans l'espace des états mélangés de l'espace de Hilbert (un état mélangé est caractérisé par la donnée d'un opérateur à trace positif de trace 1 dans $\mathcal{H}$) et définissent un semi-groupe dynamique à un paramètre $(t \in \mathbb{R}^+)$ [Da.].

- Définition 21 : $\{\tilde{v}(t) ; t \in \mathbb{R}\}$, satisfaisant les conditions (1) à (4) } s'appelle GROUPE DYNAMIQUE de Σ .

On voit que $\tilde{v}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, est une symétrie de Wigner de $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ et que $\tilde{v}$ est une représentation projective continue unitaire de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$.

- b) Le relèvement de $\tilde{v}$ (§1.2. méthode A) nous fournit v , une vraie représentation de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{H}$, puisque tous les multiplicateurs de $\mathbb{R}$ sont triviaux (voir [Va.] vol. II. p. 128); v est définie par $v(t) = \tilde{\Sigma}(\tilde{v}(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et possède les propriétés suivantes :

(1') $v(t)$ est unitaire; $t \in \mathbb{R}$

(2') $v(0) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$; $v(t)v(t') = v(t+t')$, $t, t' \in \mathbb{R}$

(3') v est borélienne; on peut montrer dans ce cas que v est continue. ([Ca.4] utilise l'argument du Th. 4 Ch. I de [Ban.])

On remarque que pour tout $\phi \in \mathcal{H} - \{0\}$ et pour chaque $t \in \mathbb{R}$ on a $\omega(\phi)(t) = \omega(v(t)\phi)$. $\{v(t) ; t \in \mathbb{R}\}$, satisfaisant les conditions (1') à (3') } est exactement ce que l'on appelle un GROUPE UNITAIRE CONTINU à un PARAMETRE.

Le relèvement v de $\tilde{v}$ n'est déterminé qu'à un caractère de la droite réelle près; i.e. : v' t.q. $v'(t) = e^{itc} \cdot v(t)$, $c \in \mathbb{R}$, a les mêmes caractéristiques que v .

- c) Appliquons le théorème de Stone à ce groupe unitaire continu à un paramètre $[\mathbb{R}, N]$; cela nous fournit un opérateur autoadjoint H engendrant le groupe $v(t)$:

$$v(t) = e^{-\frac{it}{\hbar} H} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{it}{\hbar} \lambda} dE_{\lambda}^H$$

où $\{E_{\lambda}^H\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est la famille spectrale de H . Elle est telle que tout opérateur symétrique borné qui est permutable à tous les opérateurs $v(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) est aussi permutable à E_{λ}^H , $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

- Définition 22 : L'opérateur autoadjoint H engendrant le groupe $\{U(t); t \in \mathbb{R}\}$ unitaire continu à un paramètre est appelé opérateur HAMILTONIEN du système Σ ; on dit qu'il INDUIT le groupe dynamique $\{\tilde{V}(t), t \in \mathbb{R}\}$.

Remarque 11 : L'observable correspondant à H est l'énergie du système Σ .

Remarque 12 : Puisque la représentation v de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{H}$ n'est déterminée qu'à un facteur multiplicatif près e^{ic} , $c \in \mathbb{R}$, par $\tilde{v}$, $\tilde{v}$ ne détermine H qu'à une constante additive près. i.e., H et $H + c I_{\mathcal{H}}$, $c \in \mathbb{R}$, induisent le même groupe dynamique.

- Définition 23 : G s'appelle GROUPE de SYMETRIE DYNAMIQUE du système Σ si :

(i) G est un groupe de symétrie de Σ (définition 3).

(ii) Les représentations projectives $\tilde{v} : \mathbb{R} \rightarrow PU(\mathcal{H})$ (dynamique du système) et $\tilde{u} : G \xrightarrow{\text{cont}} PU(\mathcal{H})$ satisfont :

$$\tilde{v}(t)\tilde{u}(g) = \tilde{u}(g)\tilde{v}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall g \in G$$

Lemme

Soit U un opérateur unitaire dans $\mathcal{H}$ et A un opérateur autoadjoint dans $\mathcal{H}$. Les relations suivantes sont équivalentes :

(i) $UA = AU$

(ii) $\{E_{\lambda}^A, U\} \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \{E_{\lambda}^A\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est la famille spectrale de A .

Démonstration : (i) $\implies$ (ii) suit du théorème de décomposition spectrale d'une transformation autoadjointe. Voir Ch. VIII No 120 de la réf. [R.N].

(ii) $\implies$ (i) soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des $P \in \mathcal{D}(A)$ t.q. $U^P \in \mathcal{D}(A)$.

$\forall P \in \mathcal{D}$ et $\forall \Psi \in \mathcal{D}$, on a :

$$(AU^P\Psi, \Psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_{\lambda}^A U^P\Psi, \Psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_{\lambda}^A \Psi, U^{*P}\Psi) = (A\Psi, U^{*P}\Psi) = (UA^P\Psi, \Psi)$$

d'où (i). (La deuxième égalité provient de $[E_{\lambda}^A, U] = 0$ et U borné) ■

Proposition 5

Lorsqu'il n'existe aucun homomorphisme continu non trivial de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{U}(1)$ la condition (ii) de la définition 23 est équivalente à la condition suivante :

$$(ii') \quad u(g)^{-1}H \subseteq H u(g) \quad \forall g \in G$$

où : H est l'hamiltonien du système Σ

u est un relèvement borélien de $\tilde{u}$ (§1.2. point A).

Démonstration : Soit v un relèvement borélien de $\tilde{v}$ et u un relèvement borélien de $\tilde{u}$. Il existe une application borélienne α de $\mathbb{R} \times G$ dans $\mathcal{U}(1)$ t.q.

$$v(t)u(g) = \alpha(t, g)u(g)v(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall g \in G \quad (1.4)$$

Ceci implique l'existence d'une application borélienne γ de $\mathbb{R} \times G$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\gamma(t, g) = \sigma(\alpha(t, g))$ où σ est une section borélienne normalisée associée à l'application canonique de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathcal{U}(1)$.

a) De (1.4) on a : $u(g)^{-1}v(t)u(g) = e^{i\gamma(t, g)}v(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall g \in G$

$$\text{et } u(g)^{-1}v(t)u(g)u(g)^{-1}v(t')u(g) = e^{i(\gamma(t, g) + \gamma(t', g))}v(t)v(t') \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}, \forall g \in G.$$

$$\text{D'où } u(g)^{-1}v(t+t')u(g) = e^{i(\gamma(t, g) + \gamma(t', g))}v(t+t') \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}, \forall g \in G.$$

$$\text{D'autre part : } u(g)^{-1}v(t+t')u(g) = e^{i\gamma(t+t', g)}v(t+t') \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}, \forall g \in G$$

De ces deux dernières relations on tire que

$$e^{i\delta(t+t',g)} = e^{i(\delta(t,g) + \delta(t',g))} \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}, \forall g \in G$$

L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{U}(1)$ envoyant t sur $e^{i\delta(t,g)}$ pour g fixe est un homomorphisme borélien donc continu (par le Th. 4 Ch. I de [Ban.]). Par conséquent il est de la forme $\delta(t,g) = \delta_0(g) \cdot t$ avec $\delta_0(g) = \delta(1,g)$, $t \in \mathbb{R}$, $g \in G$.

- b) De (1.4) et a) on a : $v(t)u(g)v(t)^{-1} = e^{i\delta_0(g)t}u(g) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall g \in G$
 et $v(z)u(g)v(t)^{-1}v(t')^{-1}u(g')v(z)^{-1} = e^{i(\delta_0(g) - \delta_0(g'))t}u(g)u(g') \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall g, g' \in G$
 D'où : $v(t)u(gg')v(t)^{-1} = e^{i(\delta_0(g) + \delta_0(g'))t}u(gg') \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall g, g' \in G$
 D'autre part : $v(t)u(gg')v(t)^{-1} = e^{i\delta_0(gg')t}u(gg') \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall g, g' \in G$

De ces deux dernières relations on tire que

$$e^{i\delta_0(gg')t} = e^{i(\delta_0(g) + \delta_0(g'))t} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall g, g' \in G.$$

L'application de G dans $\mathcal{U}(1)$ envoyant g sur $e^{i\delta_0(g)t}$ pour t fixe est un homomorphisme continu.

- c) Par hypothèse, il n'existe aucun homomorphisme continu non trivial de G dans $\mathcal{U}(1)$, ce qui entraîne $\delta_0(g) = 0 \quad \forall g \in G$ et que

$$u(g)v(t) = v(t)u(g) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall g \in G \quad (1.5)$$

La relation (1.5) est équivalente à $[E_\lambda^H, u(g)] = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall g \in G$

(Th. de Stone, point c)) qui elle est équivalente à (ii) (Voir Lemme) ■

Remarque 13 : (ii') exige que $\nexists \phi \in D(H)$ et $\forall g \in G$, on ait $u(g)\phi \in D(H)$.

Remarque 14 : (a) Les groupes suivants n'ont pas d'homomorphismes continus non triviaux dans $\mathcal{U}(1)$: les groupes de Lie semi-simples (par exemple $SO(3)$, $SO(3) \times SO(3)$, $SU(2)$, $SU(3)$, le groupe de Lorentz, etc.), le groupe euclidien de $\mathbb{R}^3$, le groupe de Poincaré, ...

(b) Il existe des groupes qui possèdent des homomorphismes continus non

triviaux dans $\mathcal{H}^1(A)$, par exemple $\mathbb{R}$ (dont le groupe des homomorphismes continus dans $\mathcal{H}^1(A)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$), les groupes de Heisenberg (voir §II.1.).

(c) Le cas $G = \mathbb{R}$ est un exemple du fait que la condition (ii) de la définition 23 n'est pas toujours équivalente à la condition (ii') de la proposition 5. En effet, il existe un relèvement continu u, v de la paire $\tilde{u}, \tilde{v}$ apparaissant dans (ii) telle que $u(t)v(s) = e^{it s} v(s)u(t) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$; tout autre relèvement continu u', v' de la paire $\tilde{u}, \tilde{v}$ dans la même classe de similarité ne nous fournira jamais $u'(t)v'(s) = v'(s)u'(t) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$.

Remarque 15 : La formulation (ii) a l'avantage d'être indépendante de $D(H)$, tandis que la formulation (ii') est indépendante du temps.

A partir de la représentation v de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{H}$ nous pouvons maintenant déterminer comment la distribution de probabilité d'une observable $\Xi(A)$ varie au cours du temps (A est un opérateur autoadjoint dans $\mathcal{H}$). Soit $\phi \in \mathcal{H} - \{0\}$ et $\{E_\lambda^A\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la famille spectrale de A :

$$w_{\Xi(A)}^{\omega(\phi, t)}([a, b]) = \left((E_b - E_a) v(t) \phi, v(t) \phi \right) = \left(v(t) (E_b - E_a) v(t) \phi, \phi \right)$$

quel que soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$; $\omega(\phi)(t) = \omega(v(t)\phi)$, $t \in \mathbb{R}$

(voir §I.3. a) et b)). D'où :

$$w_{\Xi(A)}^{\omega(\phi)(t)}([a, b]) = \left(v(t)^{-1} (E_b - E_a) v(t) \phi, \phi \right) \quad (1.6)$$

● Définition 24 : L'observable $\Xi(A)$ s'appelle CONSTANTE du MOUVEMENT si

$$w_{\Xi(A)}^{\omega(\phi)(t)}([a, b]) = w_{\Xi(A)}^{\omega(\phi)}([a, b])$$

$$\forall \phi \in \mathcal{H}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall [a, b] \subset \mathbb{R}$$

Proposition 6

L'observable $\Xi(A)$ est une constante du mouvement ssi elle satisfait les conditions équivalentes suivantes :

- (a) $u(\tau)H \subseteq Hu(\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad ; \quad u(\tau) = e^{iA\tau}$ est le groupe unitaire continu à un paramètre engendré par A .
- (b) Les projecteurs spectraux de H notés $\{E_\lambda^H\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ permutent aux projecteurs spectraux de A notés $\{E_\mu^A\}_{\mu \in \mathbb{R}}$;
i.e. : $E_\lambda^H E_\mu^A = E_\mu^A E_\lambda^H$ quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

- (i) Montrons que $\Xi(A)$ est une constante du mouvement $\iff$ (a)

$\Xi(A)$ est une constante du mouvement est équivalent par (1.6), la définition 24, et par polarisation à :

$$v(t)'(E_a^A - E_b^A)v(t) = E_a^A - E_b^A \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall]a, b[\subset \mathbb{R} \quad (1.7)$$

Puisque le groupe unitaire continu à un paramètre engendré par A admet la représentation spectrale

$$u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} dE_\lambda^A \quad \tau \in \mathbb{R}$$

(1.7) est équivalent à

$$v(t)'u(\tau)v(t) = u(\tau) \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

En procédant comme à la fin de la démonstration de la proposition 5, (1.8) est équivalent à $u(\tau)H \subseteq Hu(\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$.

- (ii) Montrons que (a) $\iff$ (b)

$\implies$ De (a) par le lemme, on a $[E_\lambda^H, u(\tau)] = 0$ pour tout $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$.

Par le théorème de Stone (point c) ci-dessus), on a

$$[E_\mu^A, E_\lambda^H] = 0 \quad \forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\impliedby$ D'autre part, de (b) on tire (1.8) par le théorème spectral, d'où (a) ■

§ I.4. GROUPE DE SYMETRIE D'UN OPERATEUR AUTOADJOINT DANS UN ESPACE DE HILBERT

- Définition 25 : Soit A un opérateur autoadjoint dans $\mathcal{H}$. Un groupe s'appelle GROUPE de SYMETRIE de A , s'il existe une représentation unitaire non triviale u de G sur $\mathcal{H}$, telle que : $u(g)A \subseteq Au(g) \quad \forall g \in G$.
- Définition 26 : Si G est un groupe de symétrie de A , A est dit INVARIANT par le groupe G , ou G -INVARIANT.

Remarque 16 : La définition 25 pour $A = H$ est plus restrictive que (ii) de la définition 23, où u est un relèvement de $\tilde{u}$ représentation PCU, i.e. : u est une rep. BUM; si le multiplicateur est trivial, alors on a, comme cas particulier de (ii) de la définition 23, la définition 25.

Remarque 17 : Soit B un opérateur autoadjoint. Par la proposition 6 (a), on voit que l'observable $\square(B)$ est une constante du mouvement ssi le groupe unitaire continu à un paramètre engendré par B est un groupe de symétrie pour H .

§1.5. ALGÈBRE DE SYMÉTRIE D'UN OPÉRATEUR AUTOADJOINT DANS UN ESPACE DE HILBERT

Jusqu'à maintenant, nous n'avons travaillé qu'avec des groupes. Dans ce qui suit, nous allons nous restreindre à la classe des groupes de Lie [Bo.2], passer aux algèbres de Lie [Bo.2] et à leurs représentations, afin de pouvoir introduire la notion d'algèbre de symétrie d'un opérateur autoadjoint.

Une des difficultés principales de la théorie de représentation générale d'algèbres de Lie est due au fait que les représentants des éléments d'une algèbre de Lie sont souvent des opérateurs non bornés. D'où le problème de déterminer un domaine commun $\mathcal{D}$ de définition pour l'ensemble de ces opérateurs. Ce domaine $\mathcal{D}$ est choisi linéaire (i.e. : comme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$), invariant (sous l'action de tous ces opérateurs) et dense dans $\mathcal{H}$.

Soit G un groupe de Lie réel.

- Définition 27 : Soit π une représentation continue unitaire de G sur $\mathcal{H}$. $\phi \in \mathcal{H}$ est appelé un VECTEUR INFINIMENT DIFFÉRENTIABLE (respectivement ANALYTIQUE) pour π si l'application $g \longmapsto \pi(g)\phi$ de G dans $\mathcal{H}$ est de classe C^∞ (respectivement analytique); l'ensemble de tous les vecteurs infiniment différentiables (respectivement analytiques) pour π sera noté $\mathcal{H}_\pi^\infty$ (respectivement $\mathcal{H}_\pi^\omega$).

Nous avons l'inclusion $\mathcal{H}_\pi^\omega \subset \mathcal{H}_\pi^\infty$ et

Proposition 7

$\mathcal{H}_\pi^\omega$ et $\mathcal{H}_\pi^\infty$ sont denses dans $\mathcal{H}$.

Démonstration : Voir réf. [Gä.] et [Ne.] ■

● Définition 28 : Une REPRESENTATION τ d'une algèbre de Lie L sur $\mathcal{H}$ est un couple $(\tau, D(\tau))$ où :

- (i) τ est une application de L dans l'ensemble de tous les opérateurs dans $\mathcal{H}$.
- (ii) $D(\tau)$ est un sous-espace vectoriel de $\bigcap_{X \in L} D(\tau(X))$, stable par $\tau(X)$ quel que soit $X \in L$, et dense dans $\mathcal{H}$.

$$\text{tel que : } \begin{cases} \tau(\alpha X + \beta Y)\phi = \alpha \tau(X)\phi + \beta \tau(Y)\phi \\ \tau([X, Y])\phi = (\tau(X)\tau(Y) - \tau(Y)\tau(X))\phi \end{cases}$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in L$ et $\forall \phi \in D(\tau)$. [...]

$[.,.]$ est la multiplication dans L . La représentation τ est dite SYMETRIQUE (respectivement ANTISYMETRIQUE) si $\tau(X)$ est SYMETRIQUE (respectivement ANTISYMETRIQUE) $\forall X \in L$. i.e. : si $(\tau(X)\phi, \psi) = (\phi, \tau(X)\psi)$ (respectivement $(\tau(X)\phi, \psi) = -(\phi, \tau(X)\psi)$), $\forall \phi, \psi \in D(\tau(X)), \forall X \in L$. ($(.,.)$ est le produit scalaire dans $\mathcal{H}$.)

On parlera toujours de la représentation τ de L , étant sous-entendu que le DOMAINE $D(\tau)$ est aussi donné.

Lien entre les représentations d'un groupe de Lie et celles de son algèbre de Lie

A. Chaque représentation unitaire π d'un groupe de Lie G sur $\mathcal{H}$ donne lieu d'une manière naturelle à une représentation antisymétrique de son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$.

C'est-à-dire : Soit $X \in \mathcal{G}$; définissons l'opérateur $\tilde{\pi}(X)$, en général non borné sur $\mathcal{H}$, par :

$$\tilde{\pi}(X)\phi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi(e^{tX})\phi - \phi}{t} \quad (1.9)$$

le domaine $D(\tilde{\pi}(X))$ de $\tilde{\pi}(X)$ étant l'ensemble des $\phi \in \mathcal{H}$ pour lesquels la limite dans (1.5) existe.

- Définition 29 : L'opérateur $\tilde{\pi}(\chi)$ satisfaisant (1.5) s'appelle OPERATEUR INFINITESIMAL de la représentation π de G sur $\mathcal{H}$ associé au sous-groupe à un paramètre continu $\chi(t) = e^{t\chi}$ de G ; $\chi \in \mathcal{G}$. On dit aussi que $\tilde{\pi}(\chi)$ est le GENERATEUR INFINITESIMAL de $\chi(t) = e^{t\chi}$, $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 8

$\tilde{\pi}$ définie par (1.9) avec $D(\tilde{\pi}) = \mathcal{H}_{\pi}^{\infty}$ est une représentation antisymétrique de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$ appelée REPRESENTATION INFINITESIMALE associée à π .

Démonstration : On vérifie que $(\tilde{\pi}, D(\tilde{\pi}) = \mathcal{H}_{\pi}^{\infty})$ est une représentation de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$; $\tilde{\pi}(\chi)$ antisymétrique découle de (1.3) et de l'unitarité de π .

B. Il existe des "critères d'intégrabilité de représentations d'algèbres de Lie", indiquant quand une représentation antisymétrique d'une algèbre de Lie L peut donner lieu à une représentation unitaire d'un groupe de Lie simplement connexe G , ayant pour algèbre de Lie $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} \cong L$.

- Définition 30 : Soit T une représentation antisymétrique d'une algèbre de Lie L sur $\mathcal{H}$. T est dite INTEGRABLE si pour tout groupe de Lie simplement connexe G dont l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est isomorphe à L , il existe une représentation $\pi : G \xrightarrow{\text{cont}} \mathcal{U}(\mathcal{H})$ et un isomorphisme α de $\mathcal{G}$ sur L tels que : $T(y) \subseteq (\tilde{\pi} \circ \alpha^{-1})(y)$ $\forall y \in L$, où $\tilde{\pi}$ est la représentation infinitésimale associée à π .
i.e. : $T(y)$ est une restriction de $(\tilde{\pi} \circ \alpha^{-1})(y)$, quel que soit $y \in L$.

Remarque 18 : $\forall y \in L$, la fermeture $\overline{(\tilde{\pi} \circ \alpha^{-1})(y)}$ de $(\tilde{\pi} \circ \alpha^{-1})(y)$ est un opérateur antiautoadjoint.

Nous citons deux critères nous donnant une condition suffisante pour l'intégrabilité d'une représentation antisymétrique d'une algèbre de Lie :

1° Le théorème de Nelson [Ne.] (1959).

2° La théorie de Flato, Simon, Snellman et Sternheimer [FS³.] (1972).

Définition d'une algèbre de symétrie, et lien entre l'algèbre de symétrie et le groupe de symétrie d'un opérateur autoadjoint dans un espace de Hilbert.

● Définition 31 : Soit A un opérateur autoadjoint dans $\mathcal{H}$.

Une algèbre de Lie L est une ALGEBRE de SYMETRIE de A si :

- (i) il existe une représentation antisymétrique T de L sur $\mathcal{H}$ intégrable .
- (ii) $\forall X \in L, [A, T(X)] = 0$, dans le sens que toutes les projections dans les mesures à valeurs projections qu'on associe à $i(\tilde{\pi} \cdot \alpha^{-1})(X)$ et à A commutent. $\tilde{\pi}$ et α comme dans la définition 30.

Proposition 9

Soient : L une algèbre de Lie .

G un groupe de Lie simplement connexe ayant $\mathcal{G}$ pour algèbre de Lie et tel que $\mathcal{G}$ soit isomorphe à L .

A un opérateur autoadjoint dans $\mathcal{H}$.

L est une algèbre de symétrie de A $\iff$
 G est un groupe de symétrie de A .

Démonstration : $\Leftarrow$ | G groupe de symétrie de A ; donc il existe une représentation $\pi : G \xrightarrow{\text{cont}} \mathcal{U}(\mathcal{H})$ t.q. $\pi(g)A \subseteq A\pi(g) \quad \forall g \in G$ (*)
 Considérons $\{g(t), t \in \mathbb{R}\}$ un sous-groupe continu à un paramètre de G ,
 où $g(t) = e^{itX}$, $X \in \mathcal{O}$. Par le théorème de Stone
 $\pi(g(t)) = e^{it(\tilde{\pi} \circ \alpha^{-1})(Y)}$, avec $Y = \alpha(X) \in L$ ($\tilde{\pi}$ et α comme
 dans la définition 30). Par (*)

$$e^{it(\tilde{\pi} \circ \alpha^{-1})(Y)} A \subseteq A e^{it(\tilde{\pi} \circ \alpha^{-1})(Y)} \quad \forall Y \in L.$$

L'assertion finale découle du théorème de Stone par la même méthode employée dans la démonstration de (a) $\Rightarrow$ (b)' dans la proposition 6.

$\Rightarrow$ | L une algèbre de symétrie de A ; donc il existe une représentation antisymétrique T de L sur $\mathcal{H}$ intégrable, i.e. : il existe un isomorphisme $\alpha : \mathcal{O} \rightarrow L$ avec $\mathcal{O}$ l'algèbre de Lie du groupe simplement connexe G et une représentation $\pi : G \xrightarrow{\text{cont}} \mathcal{U}(\mathcal{H})$ t.q. $T(Y) \subseteq (\tilde{\pi} \circ \alpha^{-1})(Y)$ $\forall Y \in L$; $\tilde{\pi}$ est la représentation infinitésimale associée à π . De plus, par la définition 31 (ii), les projections dans les mesures à valeurs projections associées à A et à $i(\tilde{\pi} \circ \alpha^{-1})(Y)$ commutent, quel que soit $Y \in L$. Utilisant le théorème spectral, on a que : $\pi(g(t))A \subseteq A\pi(g(t))$ pour tout sous-groupe continu à un paramètre $\{g(t) = e^{itX}; t \in \mathbb{R}\}$ de G , X fixé $\in \mathcal{O}$. Comme tout élément $g \in G$ peut s'écrire comme produit d'un nombre fini d'éléments de la forme $g_j(t_j)$, $j=1,2,\dots,n$ où $\{g_j(t); t \in \mathbb{R}\}$, pour chaque j fixé, est un sous-groupe continu à un paramètre de G , on a :

$$\begin{aligned} \pi(g)A &= \pi(g_1(t_1)) \cdots \pi(g_n(t_n))A \subseteq \pi(g_1(t_1)) \cdots \pi(g_{n-1}(t_{n-1}))A\pi(g_n(t_n)) \subseteq \cdots \\ &\subseteq A\pi(g_1(t_1)) \cdots \pi(g_n(t_n)) = A\pi(g) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Remarque 18 : La détermination de l'algèbre de symétrie d'un opérateur autoadjoint A est en général un problème délicat. La difficulté essentielle réside dans la vérification de la commutation des projections spectrales (voir déf. 31 (ii)). Dans la pratique, on cherche "empiriquement" (i.e. : en ignorant les difficultés techniques) l'algèbre L et le groupe G de symétrie de A ainsi que la représentation continue unitaire π de G . On applique ensuite la proposition 9 pour déterminer la représentation $\tilde{\pi}$ de L (voir §III.3.1.).

CHAPITRE II : LES GROUPES DE HEISENBERG

Partant du problème de "déterminer toutes les représentations projectives continues unitaires irréductibles de $\mathbb{R}^n$ ", $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la théorie du relèvement des représentations projectives exposées dans le §I.2., nous construisons dans le §II.1. les groupes de Heisenberg, nous prouvons qu'ils sont tous isomorphes (Prop. 1) et nous montrons que lorsque $n=2k$, $k \in \mathbb{N}$, le problème initial est équivalent à "chercher l'ensemble des classes d'équivalence de toutes les représentations continues unitaires irréductibles d'un groupe de Heisenberg". Puis nous rappelons comment les représentations continues unitaires irréductibles de dimension infinie d'un groupe de Heisenberg donnent lieu d'une manière naturelle à une représentation des relations de commutation (canoniques) de Heisenberg (C.C.R.). Par le théorème de Stone-Von Neumann (Prop. 2), un groupe de Heisenberg possède une représentation unitaire irréductible (à équivalence près) sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension infinie, envoyant $(t, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2k}$ sur $e^{i\pi\lambda t} \text{Id}_{\mathcal{H}}$ (unicité des systèmes d'opérateurs satisfaisant les C.C.R.). Nous construisons alors dans le §II.2. quelques représentants des classes d'équivalence K_λ des représentations continues unitaires irréductibles d'un groupe de Heisenberg par la méthode des induites; pour passer d'un espace de représentation aux autres, nous explicitons des opérateurs d'entrelacement, exploitant le fait que nous travaillons avec des représentations induites. Une représentation continue unitaire irréductible (rep. CUI) d'un groupe de Heisenberg donne lieu d'une manière naturelle aux C.C.R. Qu'en est-il du problème inverse ? C'est l'objet du dernier paragraphe de ce chapitre (§II.4. Prop. 9), où nous nous demandons "quand certains opérateurs autoadjoints satisfaisant les C.C.R. proviennent-ils d'une représentation CUI d'un groupe de Heisenberg ?".

§II.1. RELATIONS DE COMMUTATION CANONIQUES (C.C.R.) ET GROUPES DE HEISENBERG

Soit $\mathcal{H}$ un système physique; $\mathcal{H}$ est supposé de dimension infinie. Considérons le groupe $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, muni de sa topologie canonique. Est-il possible de répondre simplement à la question suivante ?

(Q.1) Quel est l'ensemble des classes d'équivalence de toutes les représentations projectives continues unitaires irréductibles de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$?

Par la théorie exposée au §I.2.A., on peut montrer que (Q.1) est équivalente à :

(Q.2) Quel est l'ensemble des classes d'équivalence de toutes les représentations boréliennes unitaires irréductibles à multiplicateur de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{H}$?

Pour répondre à cette question, considérons le groupe des classes d'équivalence des multiplicateurs de $\mathbb{R}^n$ (§I.2. Déf. 6) $-(\mathbb{R}^n) = \{[\mu]; \mu \text{ multiplicateur de } \mathbb{R}^n\}$. Dans chaque classe $[\mu]$ on peut trouver un élément de la forme suivante ([Bar.2] et [Va.]) :

$$\begin{aligned} \mu_b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{C}(1) \\ (v, v') &\longmapsto \exp(i b(v, v')) \end{aligned}$$

où b est une forme bilinéaire alternée réelle sur $\mathbb{R}^n$.

L'espace vectoriel réel des formes bilinéaires alternées réelles sur $\mathbb{R}^n$ étant de dimension $n(n-1)/2$, soit $\{b_j, j = 1, 2, \dots, n(n-1)/2\}$ une base de cet espace; l'application $\varphi : H(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ envoyant $[\exp(i \sum_{j=1}^{n(n-1)/2} \lambda_j b_j)]$ sur $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n(n-1)/2})$ est un isomorphisme. Ce qui nous permet de choisir, dans chaque classe d'équivalence des représentations BUM de $\mathbb{R}^n$, un représentant noté $S_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n(n-1)/2})}$ satisfaisant :

$$S_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n(n-1)/2})}(v) S_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n(n-1)/2})}(v') = \mu_{\sum_{j=1}^{n(n-1)/2} \lambda_j b_j}(v, v') S_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n(n-1)/2})}(v+v')$$

$$v, v' \in \mathbb{R}^n$$

Le multiplicateur étant continu, on peut voir que $\mathcal{S}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n, (n, n)/2)}$ est une représentation continue unitaire à multiplicateur de $\mathbb{R}^n$ ([Ca.4] utilise l'argument du th. 4 Ch. I de [Bar.].)

L'irréductibilité des représentations cherchées entraîne que les b à considérer doivent être non dégénérées. Une forme bilinéaire alternée non dégénérée σ sur $\mathbb{R}^n$ n'étant non nulle que si n est pair, nous ne nous intéresserons qu'à des espaces de dimension $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. D'autre part, l'espace vectoriel réel des formes bilinéaires alternées non dégénérées sur $\mathbb{R}^{2k}$ est de dimension un ([We.] p. 397).

Choisissons un élément σ_0 de cet espace défini de la manière suivante.

Soit $\{e_j, f_j; j=1, 2, \dots, k\}$ une base de $\mathbb{R}^{2k}$, alors on pose $\sigma_0(e_j, e_l) = \delta_{jl}$ et $\sigma_0(f_j, f_l) = 0$ $\forall j, l = 1, 2, \dots, k$. Dans cette base, $v \in \mathbb{R}^{2k}$ se décompose en $v = \sum_{j=1}^k (x_j e_j + y_j f_j) =: x e + y f =: (x, y)$ $x, y \in \mathbb{R}^k$ et $x e =: \sum_{j=1}^k x_j e_j$, $y f =: \sum_{j=1}^k y_j f_j$; on a : $\sigma_0(v, v') = \sigma_0((x, y), (x', y')) = x y' - y x'$ où $v, v' \in \mathbb{R}^{2k}$ et $x y = \sum_{j=1}^k x_j y_j$. Toute autre forme bilinéaire alternée non dégénérée réelle sur $\mathbb{R}^{2k}$ s'écrit : $\sigma = \theta \sigma_0$, $\theta \in \mathbb{R}$. Notons $H^1(\mathbb{R}^{2k})$ le groupe des classes d'équivalence des multiplicateurs des représentations CUM irréductibles de $\mathbb{R}^{2k}$ sur $\mathcal{H}$. L'application $\varphi^1 : H^1(\mathbb{R}^{2k}) \longrightarrow \mathbb{R}$ envoyant $[e^{i\theta\sigma_0}]$ sur θ , est un isomorphisme.

Remarque 1 : Si Σ a n degrés de liberté et $\mathbb{R}^n$ est un groupe de covariance de Σ , alors la question (Q.1) revêt un sens précis. Dans cette même question on restreint la recherche des représentations projectives continues unitaires de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ aux irréductibles seulement, de façon tout à fait arbitraire. On peut se demander s'il est possible d'obtenir un résultat identique à celui de la réponse à (Q.1) (voir plus loin) d'une autre manière plus naturelle ! Un exemple dans le cas $n=6$ est le suivant. Considérons un système physique Σ et le groupe $\mathbb{R}^6$. Supposons que le groupe $G = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \rtimes_{\varphi} \text{SO}(3)$ soit un groupe de "covariance" de Σ (par rapport à l'espace de phase). L'action Ψ de $\text{SO}(3)$ sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ est définie par $\Psi(R)(q, p) = (Rq, Rp)$ $R \in \text{SO}(3)$, $q, p \in \mathbb{R}^3$ et G agit sur l'espace de phase d'une manière naturelle (par analogie à

l'action du groupe euclidien sur l'espace de configuration). Le groupe des classes d'équivalence des multiplicateurs de G est $H(G) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$. L'apparition du groupe $\mathbb{Z}_2$ dans $H(G)$ est due à $SO(3)$; cela reflète la règle de supersélection entre fermions et bosons. Ainsi le groupe des classes d'équivalence des multiplicateurs de $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \rtimes_\rho SO(3)$, au groupe $\mathbb{Z}_2$ près, est isomorphe au groupe des classes d'équivalence des multiplicateurs des représentations CUM IRREDUCTIBLES de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{H}$; par conséquent, chercher l'ensemble des classes d'équivalence de toutes les représentations projectives continues unitaires irréductibles de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ est équivalent à chercher l'ensemble des classes d'équivalence des restrictions à $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ de toutes les représentations projectives continues unitaires de $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \rtimes_\rho SO(3)$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{H})$.

● Définition 1 : L'espace $\mathbb{R}^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, muni de σ , une forme bilinéaire alternée réelle non dégénérée sur $\mathbb{R}^{2k}$, est appelé l'ESPACE SYMPLECTIQUE $(\mathbb{R}^{2k}, \sigma)$. σ s'appelle FORME SYMPLECTIQUE sur $\mathbb{R}^{2k}$ et $\{e_j, f_j; \sigma(e_j, f_\ell) = \theta \delta_{j\ell}, \sigma(e_j, e_\ell) = \sigma(f_j, f_\ell) = 0, j, \ell = 1, 2, \dots, k\}$ s'appelle BASE SYMPLECTIQUE de $(\mathbb{R}^{2k}, \sigma)$.

● Définition 2 : Une représentation $\mathcal{J}$ continue unitaire à multiplicateur μ_p de $\mathbb{R}^{2k}$ sur $\mathcal{H}$, i.e. :

$$\mathcal{J}(v) \mathcal{J}(v') = e^{i\mu_p(v, v')} \mathcal{J}(v+v') \quad v, v' \in \mathbb{R}^{2k}$$

où $\mu_p \in [\mu_\sigma]$ avec σ une forme bilinéaire alternée non dégénérée réelle sur $\mathbb{R}^{2k}$, s'appelle REPRESENTATION des RELATIONS de COMMUTATION CANONIQUES (repr. des C.C.R.).

Utilisant la théorie exposée au chapitre I, §2.C., on peut faire une extension de $\mathbb{R}^{2k}$ par $\mathcal{J}(H(\mathbb{R}^{2k}))^\wedge$, où $\mathcal{J}$ est un sélecteur (§I.2. Déf. 19) relativement à $\mathbb{R}^{2k}$ défini par

$$\mathcal{J}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{k(1k-1)} \lambda_j b_j\right)\right](v, v') = \exp\left(i\sum_{j=1}^{k(1k-1)} \lambda_j b_j(v, v')\right)$$

Ainsi la fonction (§I.2. Déf. 20) $ev^{\mathcal{J}}(v, v')$ telle que

$$ev^{\mathcal{J}}(v, v')\left(\mathcal{J}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{k(1k-1)} \lambda_j b_j\right)\right]\right) = \exp\left(i\sum_{j=1}^{k(1k-1)} \lambda_j b_j(v, v')\right)$$

est une fonction continue pour tout $v, v' \in \mathbb{R}^{2k}$, et le groupe $(\varepsilon(H(\mathbb{R}^{2k}))^\wedge |_{\text{ev}^s} | \mathbb{R}^{2k})$ (voir §I.2. Déf. 11 et Prop. 4 (i)) est un groupe de représentation pour $\mathbb{R}^{2k}$ de projection séparante pr_2 et de section séparante Σ associée à pr_2 t.q. $\Sigma : v \in \mathbb{R}^{2k} \longmapsto (e_{\varepsilon(H(\mathbb{R}^{2k}))^\wedge}, v)$. Par §I.2. Prop. 4 (iii) ce groupe est unique à isomorphisme près.

Notons $(\mathbb{R}^{k(2k-1)} | (b_1, \dots, b_{k(2k-1)}) | \mathbb{R}^{2k})$ le groupe topologique dont les éléments sont les couples $(t_1, \dots, t_{k(2k-1)}, v) \in \mathbb{R}^{k(2k-1)} \times \mathbb{R}^{2k}$, muni du produit :

$$((t_1, \dots, t_{k(2k-1)}), v)((t'_1, \dots, t'_{k(2k-1)}), v') = ((t_1 + t'_1 + b_1(v, v'), \dots, t_{k(2k-1)} + t'_{k(2k-1)} + b_{k(2k-1)}(v, v')), v + v')$$

et de la topologie produit.

Proposition 1

Les groupes de représentations de $\mathbb{R}^{2k} : (\varepsilon(H(\mathbb{R}^{2k}))^\wedge |_{\text{ev}^s} | \mathbb{R}^{2k})$ quel que soit s le sélecteur associé à $\mathbb{R}^{2k}$, et les groupes topologiques :

$(\mathbb{R}^{k(2k-1)} | (\theta_1 b_1, \dots, \theta_{k(2k-1)} b_{k(2k-1)}) | \mathbb{R}^{2k})$ quel que soit $(\theta_1, \dots, \theta_{k(2k-1)}) \in \mathbb{R}^{k(2k-1)}$, sont tous topologiquement isomorphes entre eux.

Démonstration :

(i) Puisque $H(\mathbb{R}^{2k})$ est isomorphe par ψ à $\mathbb{R}^{k(2k-1)}$,

$$\varepsilon(H(\mathbb{R}^{2k}))^\wedge = \left\{ \chi_{(t_1, \dots, t_{k(2k-1)})} ; t_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, k(2k-1) ; \right. \\ \left. \text{t.q. } \chi_{(t_1, \dots, t_{k(2k-1)})} \left(\exp \left(i \sum_{j=1}^{k(2k-1)} \lambda_j b_j \right) \right) = \exp \left(i \sum_{j=1}^{k(2k-1)} \lambda_j t_j \right) \right\} \quad \text{est}$$

aussi isomorphe à $\mathbb{R}^{k(2k-1)}$. La fonction $\text{ev}^s(v, v')$ définie ci-dessus s'écrit $\text{ev}^s(v, v') = \chi_{(b_1(v, v'), \dots, b_{k(2k-1)}(v, v'))}$.

L'application :

$$\eta_{\theta_1, \dots, \theta_{k(2k-1)}} : (s' | (R^{2k})^{\wedge} | ev^s | R^{2k}) \longrightarrow (R^{k(2k-1)} | (\theta_1 b_1, \dots, \theta_{k(2k-1)} b_{k(2k-1)}) | R^{2k})$$

$$(\chi_{(t_1, \dots, t_{k(2k-1)})}, v) \longmapsto ((\theta_1 t_1, \dots, \theta_{k(2k-1)} t_{k(2k-1)}), v)$$

est un isomorphisme topologique.

(ii) Soit s' un sélecteur associé à R^{2k} défini par :

$$ev^{s'}(v, v') (s' [\exp (i \sum_{j=1}^{k(2k-1)} \lambda_j b_j)]) = \exp (i \sum_{j=1}^{k(2k-1)} \lambda_j \beta_j(v, v'))$$

$$\text{ou} \quad \sum_{j=1}^{k(2k-1)} \lambda_j b_j(v, v') = \sum_{j=1}^{k(2k-1)} \lambda_j (\beta_j(v, v') + \mu_j^+(v) + \mu_j^-(v') - \mu_j^+(v + v'))$$

avec $\mu_j : R \longrightarrow R$ borélienne $\forall j = 1, 2, \dots, k(2k-1)$

L'application

$$\zeta : (s(H(R^{2k}))^{\wedge} | ev^s | R^{2k}) \longrightarrow (s' | (R^{2k})^{\wedge} | ev^{s'} | R^{2k})$$

$$(\chi_{(t_1, \dots, t_{k(2k-1)})}, v) \longmapsto (\chi_{(t_1 + \mu_1^+(v), \dots, t_{k(2k-1)} + \mu_{k(2k-1)}^-(v))}, v)$$

est un isomorphisme topologique (voir th. 4. ch. I de [Bar.]).

$(s(H(R^{2k}))^{\wedge} | ev^s | R^{2k})$ est un groupe de représentation de R^{2k} , de projection séparante pr_2 et de section séparante associée à pr_2 , Σ' , liée à Σ par :

$$\theta(\Sigma(v)) = \chi_{(\mu_1(v), \dots, \mu_{k(2k-1)}(v))} \Sigma'(v), \quad v \in R^{2k}$$

$$(iii) \quad \beta_{\theta}^{\theta} : (R^{k(2k-1)} | (\theta_1 b_1, \dots, \theta_{k(2k-1)} b_{k(2k-1)}) | R^{2k}) \longrightarrow (R^{k(2k-1)} | (\theta'_1 b_1, \dots, \theta'_{k(2k-1)} b_{k(2k-1)}) | R^{2k})$$

$$((t_1, \dots, t_{k(2k-1)}), v) \longmapsto ((\frac{\theta'_1}{\theta_1} t_1, \dots, \frac{\theta'_{k(2k-1)}}{\theta_{k(2k-1)}} t_{k(2k-1)}), v)$$

est un isomorphisme topologique ■

Point de vue représentations continues unitaires de

$(R^{k(2k-1)} | (\theta_1 b_1, \dots, \theta_{k(2k-1)} b_{k(2k-1)}) | R^{2k})$, on peut dire par les Prop. 1 et

Prop. 3 du §I.2. que, pour chaque représentation CUM $\mathcal{J}_{(\lambda_1 \theta_1, \dots, \lambda_{k(2k-1)} \theta_{k(2k-1)})}$

de multiplicateur $\exp(2\pi i \sum_{j=1}^{k(2k-1)} \lambda_j b_j)$ de R^{2k} , il existe

$\mathcal{J}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{k(2k-1)})} \in (R^{k(2k-1)})^{\wedge}$ satisfaisant

$$\xi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{k(2k-1)})}(t_1, \dots, t_{k(2k-1)}) = \exp\left(2i\pi \sum_{j=1}^{k(2k-1)} \lambda_j t_j\right) \quad \text{tel que}$$

$$\pi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{k(2k-1)})}((t_1, \dots, t_{k(2k-1)}), v) = \xi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{k(2k-1)})}(t_1, \dots, t_{k(2k-1)}) \int_{(2i\pi\lambda_1, \dots, 2i\pi\lambda_{k(2k-1)})}(v)$$

soit une représentation continue unitaire séparante de

$$(\mathbb{R}^{k(2k-1)} | (\theta_1 b_1, \dots, \theta_{k(2k-1)} b_{k(2k-1)}) | \mathbb{R}^{2k})$$

Nous nous intéressons aux irréductibles seulement. Puisque $\mathbb{H}^1(\mathbb{R}^{2k})$ est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathcal{U}^1(\mathbb{R}^{2k})^\wedge$ est aussi isomorphe à $\mathbb{R}$. Identifiant $\mathbb{R}$ avec le sous-espace $\{(t, 0, \dots, 0); t \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^{k(2k-1)}$ et $(\mathbb{R} | \theta \sigma, | \mathbb{R}^{2k})$ avec le sous-groupe topologique $(\mathbb{R} | (\theta \sigma, 0, \dots, 0) | \mathbb{R}^{2k})$ de $(\mathbb{R} | (\theta \sigma, \theta_1 b_1, \dots, \theta_{k(2k-1)} b_{k(2k-1)}) | \mathbb{R}^{2k})$, nous pouvons énoncer :

Proposition 2

Soit $(\mathbb{R}^{2k}, \theta \sigma)$ un espace symplectique et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, de dimension infinie.

(i) Le groupe topologique $(\mathbb{R} | \theta \sigma, | \mathbb{R}^{2k})$ est un groupe de Lie connexe et simplement connexe, nilpotent.

(ii) Soit $w_\lambda : (\mathbb{R} | \theta \sigma, | \mathbb{R}^{2k}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ définie par :

$$w_\lambda(t, v) = e^{2i\pi\lambda t} \int_{2\pi\lambda}(v) \quad t \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^{2k}, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

et où $\int_{2\pi\lambda}$ est une représentation continue unitaire irréductible à multiplicateur $\int_{2\pi\lambda\theta\sigma}$ de $\mathbb{R}^{2k}$ sur $\mathcal{H}$, i.e. :

$$\int_{2\pi\lambda}(v) \int_{2\pi\lambda}(v') = e^{2i\pi\lambda\theta\sigma} \int_{2\pi\lambda}(v+v') \quad v, v' \in \mathbb{R}^{2k}.$$

Alors : w_λ est une représentation continue unitaire irréductible de $(\mathbb{R} | \theta \sigma, | \mathbb{R}^{2k})$ sur $\mathcal{H}$.

(iii) Le cas $\lambda = 0$ fournit les caractères de $(\mathbb{R} | \theta \sigma, | \mathbb{R}^{2k})$:
 $\chi_u(t, v) = \exp(2i\pi\sigma_u(v, u))$, u élément fixé de $\mathbb{R}^{2k}$, $t \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^{2k}$.

(iv) Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, il existe à équivalence unitaire près, exactement une représentation continue unitaire irréductible π_λ de $(\mathbb{R} | \theta \sigma, | \mathbb{R}^{2k})$ sur $\mathcal{H}$ satisfaisant $\pi_\lambda(t, 0) = e^{2i\pi\lambda t} I_{\mathcal{H}}$.

(v) $\{\pi_\lambda, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\} \cup \{\text{caractères de } (\mathbb{R} | \theta \sigma, | \mathbb{R}^{2k})\}$ est un ensemble de représentants des classes d'équivalence (un pour chaque classe) de toutes les représentations continues unitaires irréductibles de $(\mathbb{R} | \theta \sigma, | \mathbb{R}^{2k})$.

Démonstration :

(i) L'espace sous-jacent à $(\mathbb{R} | \theta \sigma_0 | \mathbb{R}^{2k})$, est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2k}$ avec la topologie produit, donc connexe et simplement connexe. D'autre part l'extension d'un groupe de Lie par un groupe de Lie est un groupe de Lie (voir Prop. 23.1 de [Cal.]).

$$(ii) \quad \begin{aligned} w_\lambda(t, v) w_\lambda(t', v') &= e^{2i\pi\lambda t} \int_{2i\pi\lambda} (v) e^{2i\pi\lambda t'} \int_{2i\pi\lambda} (v') = e^{2i\pi\lambda(t+t')} e^{2i\pi\lambda \theta \sigma_0(v, v')} \int_{2i\pi\lambda} (v+v') \\ &= e^{2i\pi\lambda(t+t' + \theta \sigma_0(v, v'))} \int_{2i\pi\lambda} (v+v') = w_\lambda(t+t' + \theta \sigma_0(v, v'), v+v') \\ t, t' &\in \mathbb{R}, \quad v, v' \in \mathbb{R}^{2k}. \end{aligned}$$

Continuité, unitarité et irréductibilité découlent des propriétés de $e^{2i\pi\lambda t}$ et $\int_{2i\pi\lambda}$.

(iii) Clair.

(iv) et (v) Découlent du théorème de M. Stone et J. von Neumann, [St.] et [Von N. 1] ■

● Définition 3 : Soit σ une forme bilinéaire alternée réelle non dégénérée sur $\mathbb{R}^{2k}$, et $[\sigma]$, la classe d'équivalence des multiplificateurs de $\mathbb{R}^{2k}$ (notation additive) équivalents à σ . Lorsque $\beta \in [\sigma]$, $\|H_\beta(2k+1)\| = (\mathbb{R} | \beta | \mathbb{R}^{2k})$ (le groupe topologique dont les éléments sont les couples (t, v) , $t \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^{2k}$, muni du produit :

$$(t, v)(t', v') = (t+t' + \beta(v, v'), v+v')$$

et de la topologie produit) s'appelle un GROUPE de HEISENBERG. Dans le cas où $\beta = \sigma$, $\|H_\sigma(2k+1)\| = (\mathbb{R} | \sigma | \mathbb{R}^{2k})$ s'appelle GROUPE de HEISENBERG associé à l'espace symplectique $(\mathbb{R}^{2k}, \sigma)$. Lorsque $\sigma = \frac{1}{4\pi k} \sigma_0$, on le note simplement $\|H(2k+1)\|$.

Nous travaillerons de préférence avec le groupe de Heisenberg $\|H(2k+1)\|$ pour des raisons de commodité; tout résultat obtenu pour ce groupe peut aisément être transcrit pour un groupe de Heisenberg quelconque, à l'aide de la proposition 1.

En résumé, nous avons répondu à la question suivante, équivalente à (Q.2) :

(Q.3) Quel est l'ensemble des classes d'équivalence de toutes les représentations continues unitaires irréductibles de $H(2k+1)$ sur $\mathcal{H}$, envoyant $(t, 0)$ sur $e^{i\pi\lambda t} Id_{\mathcal{H}}$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$?

Nous pouvons maintenant clarifier les termes apparaissant dans l'entête de ce paragraphe.

A. Une représentation continue unitaire irréductible du groupe de Heisenberg $H_{\beta}(2k+1)$ sur $\mathcal{H}$, envoyant $(t, 0)$ sur $e^{i\pi\lambda t} Id_{\mathcal{H}}$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ fixé, donne lieu d'une manière naturelle à une représentation des relations de commutation canoniques (Définition 2), et inversement.

Démonstration : Utilisant (iv) et (ii) de la proposition 2, la représentation considérée a la forme : $\pi_{\lambda}(t, v) = e^{i\pi\lambda t} \int_{i\pi\lambda}^{\circ} (v)$ avec $\int_{i\pi\lambda}^{\circ}$ une représentation des relations de commutation canoniques de multiplicateur $\exp(i\pi\lambda\beta(\cdot, \cdot))$ ■

B. Soit π_{λ} une représentation continue unitaire irréductible de $H_{\beta}(2k+1)$ sur $\mathcal{H}$, $\beta \in [\sigma]$, envoyant $(t, 0) \in H_{\beta}(2k+1)$ sur $e^{i\pi\lambda t} Id_{\mathcal{H}}$. Par A, $\pi_{\lambda}(t, v) = e^{i\pi\lambda t} \int_{i\pi\lambda}^{\circ} (v)$ avec $\int_{i\pi\lambda}^{\circ}$ de multiplicateur $\exp(i\pi\lambda\beta(\cdot, \cdot))$; $v = (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$. π_{λ} donne lieu aux relations de commutation de Weyl :

$$U_{\lambda}(x) V_{\lambda}(y) = e^{i\pi\lambda\theta xy} V_{\lambda}(y) U_{\lambda}(x)$$

où : U_{λ} et V_{λ} sont les représentations continues unitaires irréductibles de $\mathbb{R}^k$ définies par $U_{\lambda}(x) = \int_{i\pi\lambda}^{\circ}(x, 0)$ et $V_{\lambda}(y) = \int_{i\pi\lambda}^{\circ}(0, y)$. Pour voir cela, il faut utiliser le fait que $\beta \in [\sigma]$, $\sigma = \theta\sigma_0$.

Des relations de commutation de Weyl on déduit les relations de commutation (canoniques) de Heisenberg :

$$[Q_{\lambda}^j, P_{\lambda}^{\ell}] = \frac{4\pi\lambda\theta}{abk} ik \delta_{j\ell} Id_{\mathcal{H}_{\pi}} \quad j, \ell = 1, 2, \dots, k.$$

$$[Q_{\lambda}^j, Q_{\lambda}^{j'}] = [P_{\lambda}^{\ell}, P_{\lambda}^{\ell'}] = 0 \quad \forall j, j', \ell, \ell' = 1, 2, \dots, k$$

où : $Q_{\lambda}^j, P_{\lambda}^j$, $j, \ell = 1, 2, \dots, k$ sont des opérateurs autoadjoints, générateurs infinitésimaux des sous-groupes à un paramètre des groupes $\{V_{\lambda}(y); y \in \mathbb{R}^k\}$ et $\{U_{\lambda}(x); x \in \mathbb{R}^k\}$ respectivement, ayant $\mathcal{H}_{\pi}^{\infty}$ comme domaine commun invariant dense dans $\mathcal{H}$, définis de la manière suivante à l'aide du théorème de Stone : $V_{\lambda}^j(t) = e^{iatQ_{\lambda}^j}$, $U_{\lambda}^{\ell}(x) = e^{ib_{\ell}P_{\lambda}^{\ell}}$, $t, x \in \mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ fixés; $j^0 = 1, 2, \dots$.

C. $\{Q_{\lambda}^j, P_{\lambda}^{\ell}, I; j, \ell = 1, 2, \dots, k\}$ avec les $Q_{\lambda}^j, P_{\lambda}^j$ satisfaisant les relations de commutation (canoniques) de Heisenberg, forme la base d'une algèbre de Lie réelle isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(2k+1)$ de $H_{\mathbb{R}}(2k+1)$ et appelée ALGÈBRE de HEISENBERG de dimension $2k+1$.

D. On remarquera que les relations de commutation canoniques de Heisenberg ne sont pas équivalentes aux relations de commutation de Weyl. En effet, soit T une représentation antisymétrique irréductible de l'algèbre de Heisenberg L sur $\mathcal{H}$. On a : $[T(e_j), T(f_j)] = ik\delta_{jj}I$ sur $D(T)$, $j, \ell = 1, 2, \dots, k$ et $I = T(u_0)$; $[T(e_j), T(e_j')] = [T(f_j), T(f_j')] = 0$, $j, j', \ell, \ell' = 1, 2, \dots, k$ où $\{e_j, f_j, u_0; j = 1, 2, \dots, k\}$ est une base de L . Si T est intégrable (§I.5. Def. 30), alors les relations de commutation canoniques de Heisenberg donnent lieu aux relations de commutation de Weyl. Dans le cas trois dimensionnel [D.M.] ont construit un exemple d'une représentation antisymétrique irréductible non intégrable. Dans le cas où la représentation T de L est intégrable, on vérifie la relation d'incertitude :

$$(\Delta T(e_j))(\varphi)(\Delta T(f_j))(\varphi) \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{sur} \quad D(\overline{T(e_j)}) \cap D(\overline{T(f_j)}) \ni \varphi$$

tout entier, au lieu de $D(T) \subset D(\overline{T(e_j)}) \cap D(\overline{T(f_j)})$ (voir [D.M.]).

§ II.2. CONSTRUCTION DE QUELQUES REPRESENTANTS DE LA CLASSE
D'EQUIVALENCE DES REPRESENTATIONS CONTINUES UNITAIRES
IRRÉDUCTIBLES DU GROUPE DE HEISENBERG $H(2k+1)$ SUR $\mathcal{H}$,
ENVOYANT $(t, 0)$ SUR $e^{2\pi\lambda t} I_d$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

Notons $\mathcal{K}_\lambda$ cette classe d'équivalence. Pour calculer quelques éléments de $\mathcal{K}_\lambda$, nous allons utiliser le concept de représentation induite, qui joue un rôle fondamental dans la théorie de la représentation des groupes de Lie nilpotents, puisque "dans chaque classe d'équivalence des représentations continues unitaires irréductibles d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe on peut trouver un élément qui est induit à partir d'une représentation continue unitaire de dimension un d'un certain sous-groupe" (Th. 5.1 de [Ki.] et [Ma. 2]). La méthode des représentations holomorphes (antiholomorphes) induites construites à partir de polarisations positives sera appliquée dans un cas particulier, sans être exposée de manière générale ([B.C.D.], [A.K.] et [Bab.]).

● Définition 4 : Soient :

- H un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie nilpotent G ;
- χ une représentation continue unitaire de dimension un de H ;
- dh et d_g des mesures de Haar (à droite et à gauche, car G et H sont unimodulaires) sur H et G respectivement ;
- $d\mu$ (respectivement $d\mu'$) une mesure sur
- $M =: H \backslash G = \{H_g; g \in G\}$ (resp. $M' = G_- = \{gH; g \in G\}$),
- invariante sous les translations à droite (respectivement à gauche) par les éléments de G ;
- $\mathcal{H}_\chi$ (respectivement $\mathcal{H}'_\chi$) =: $\{ \varphi : G \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.q.} \quad$
- (i) φ est borélienne sur G
- (ii) $\varphi(hg) = \chi(h)\varphi(g)$, $\forall g \in G$ et $h \in H$
(respectivement $\varphi(gk) = \chi(k)^{-1}\varphi(g)$, $\forall g \in G$ et $k \in H$)
- (iii) $\int_M |\hat{\varphi}(m)|^2 d\mu(m) < +\infty$ où $\hat{\varphi}(m) = \varphi(g)$ si $m = H_g, g \in G$
(resp. $\int_{M'} |\hat{\varphi}(m')|^2 d\mu'(m') < +\infty$ où $\hat{\varphi}(m') = \varphi(g)$, si $m' = gH, g \in G$)

● Définition 4 : Par abus, on notera pour (iii) $\int_M |\hat{f}(g)|^2 dg < +\infty$

(suite) (respectivement $\int_M |\hat{f}(g)|^2 dg < +\infty$), ce qui a un sens puisque, par (ii), $|\chi(h)| = 1$ entraîne $|\hat{f}|^2 = \text{constante}$ sur chaque classe Hg (respectivement gH).

Muni du produit scalaire $(\hat{f}_1, \hat{f}_2) = \int_M \overline{\hat{f}_1(g)} \hat{f}_2(g) dg$ (respectivement $(\hat{f}_1, \hat{f}_2)' = \int_M \overline{\hat{f}_1(g)} \hat{f}_2(g) dg$), $\mathcal{H}_\chi$ (respectivement $\mathcal{H}'_\chi$) est un espace complet, non vide. Son séparé (i.e. : l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{H}_\chi$ (respectivement $\mathcal{H}'_\chi$) qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle) est un espace de Hilbert.

(C.5) Par abus, on utilisera les mêmes notations pour les deux espaces et leurs éléments, comme on fait habituellement dans la littérature.

Associations à chaque $g \in G$ un opérateur unitaire $\pi_\chi(g)$ sur $\mathcal{H}_\chi$ (respectivement $\pi'_\chi(g)$ sur $\mathcal{H}'_\chi$) par :

$$(\pi_\chi(g)\hat{f})(g') = \hat{f}(gg') \quad (\text{translation à droite})$$

$$(\text{resp. } (\pi'_\chi(g)\hat{f})(g') = \hat{f}(g^{-1}g')) \quad (\text{translation à gauche})$$

Le couple $(\pi_\chi, \mathcal{H}_\chi)$ (respectivement $(\pi'_\chi, \mathcal{H}'_\chi)$) est une représentation continue unitaire de G , appelée la REPRESENTATION INDUITE à DROITE (respectivement à GAUCHE) par le caractère χ de H .

Considérons le groupe de Heisenberg $||H(2k+1)$ et son algèbre de Lie $\mathcal{H}(2k+1)$. Pour éviter toute confusion entre $(t,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2k}$ vu comme élément de $||H(2k+1)$ ou de $\mathcal{H}(2k+1)$, nous identifierons [Car.] :

i) $(t,v) \in \mathcal{H}(2k+1)$ avec $tu_0 + v$ par l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2k}$ sur $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{2k}$ envoyant $(1,0)$ sur u_0 et $(0,v)$ sur v , où u_0 est un élément quelconque fixe de $\mathbb{R}$.

ii) $(t,v) \in ||H(2k+1)$ avec $e^{tu_0} e^v$ par l'application exponentielle de $\mathcal{H}(2k+1)$ sur $||H(2k+1)$.

On obtient

- a) Le crochet de Lie dans $\mathcal{H}(2k+1) : [u_0, v] = 0, [v, v'] = \frac{1}{2\pi k} \sigma_0(v, v') u_0 ; v, v' \in \mathbb{R}^{2k}$.
- b) Le produit dans $\mathcal{H}(2k+1) : e^{tu_0} e^v e^{t'u_0} e^{v'} = e^{(t+t') + \frac{1}{4\pi k} \sigma_0(v, v')} u_0 e^{v+v'}$
 où $t, t' \in \mathbb{R} ; v, v' \in \mathbb{R}^{2k}$.

Nous avons aussi besoin des appellations suivantes :

$\mathcal{J}$: Le sous-espace à une dimension de $\mathcal{H}(2k+1)$ engendré par u_0 . C'est le centre de $\mathcal{H}(2k+1)$.

$\mathcal{Z}$: L'image de $\mathcal{J}$ par l'application exponentielle. C'est le centre de $\mathcal{H}(2k+1)$.

$\{e_j, p_j ; j=1, 2, \dots, k\}$: La base symplectique de $(\mathbb{R}^{2k}, \frac{1}{4\pi k} \sigma_0)$. On rappelle que :

$$\sigma_0(e_j, p_\ell) = \delta_{j\ell} \quad , \quad \sigma_0(e_j, e_{j'}) = \sigma_0(p_\ell, p_{\ell'}) = 0 \quad , \quad j, j', \ell, \ell' \in \{1, 2, \dots, k\}$$

et que dans cette base $v \in \mathbb{R}^{2k}$ se décompose en

$$v = \sum_{j=1}^k (x_j e_j + y_j p_j) = x e + y p =: (x, y) \quad \text{où} \quad x, y \in \mathbb{R}^k.$$

$$\text{Avec } xy = \sum_{j=1}^k x_j y_j \quad \text{on a } \sigma_0(v, v') = \sigma_0((x, y), (x', y')) = xy' - yx'.$$

$\{u_0, e_j, p_\ell ; j, \ell=1, 2, \dots, k\}$ est une base de $\mathcal{H}(2k+1)$ appelée BASE NORMALE. Les seuls crochets non nuls entre les éléments de cette base sont $[e_j, p_j] = \frac{1}{4\pi k} u_0 ; j=1, 2, \dots, k$.

Si $g \in \mathcal{H}(2k+1)$, dg est la mesure de Haar sur $\mathcal{H}(2k+1)$.

A. Représentation de type "position" de $\mathcal{H}(2k+1)$.

Considérons les deux sous-espaces vectoriels de dimension k suivants de $\mathbb{R}^{2k}$: $E = \{y p ; y \in \mathbb{R}^k\}$ et $E' = \{x e ; x \in \mathbb{R}^k\}$. On a $\mathbb{R}^{2k} = E \oplus E'$ et $\sigma_0(E, E) = \sigma_0(E', E') = \{0\}$.

Par conséquent, un élément g de $\mathcal{H}(2k+1)$ peut s'écrire de manière unique :

$$g = e^{tx_0} e^{y p} e^{x e} \quad ; \quad t \in \mathbb{R} ; x, y \in \mathbb{R}^k.$$

Soit $H_A = \{ e^{tu} \cdot e^{y^p} \cdot t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^k \}$; H_A est un sous-groupe abélien, normal, de $H(2k+1)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, fixé. Les caractères de H_A envoyant e^{tu} sur $e^{2\pi i \lambda t}$ sont de la forme :

$$\chi_{\lambda\tau}^A(e^{tu} \cdot e^{y^p}) = e^{2\pi i \lambda t} e^{2\pi i \tau y} \quad \text{où } \tau \in \mathbb{R}^{2k} \quad \text{et } \tau y = \sum_{j=1}^n \tau_j y_j$$

Notons $(\pi_{\lambda\tau}^A, \mathcal{H}_{\lambda\tau}^A)$ la représentation induite à droite de $H(2k+1)$ par le caractère $\chi_{\lambda\tau}^A$ de H_A .

Par définition $\mathcal{H}_{\lambda\tau}^A$ est l'ensemble des fonctions $\underline{\phi}$ sur $H(2k+1)$, de carré intégrable modulo H_A et satisfaisant la relation :

$$\underline{\phi}(hg) = \chi_{\lambda\tau}^A(h) \underline{\phi}(g) \quad , \quad h \in H_A \quad \text{et} \quad g \in H(2k+1).$$

Donc :

$$\underline{\phi}(e^{tu} \cdot e^{y^p} \cdot e^{x^e}) = e^{2\pi i \lambda t} e^{2\pi i \tau y} \underline{\phi}(e^{x^e}) \quad \text{q.q.s. } g = e^{tu} \cdot e^{y^p} \cdot e^{x^e} \in H(2k+1).$$

On peut définir un isomorphisme R_A de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\lambda\tau}^A$ sur $L^2(\mathbb{R}^k)$:

$$(R_A \underline{\phi})(x) = \underline{\phi}(e^{x^e})$$

Démonstration : L'espace $H(2k+1)/H_A$ s'identifie à E' , puisque tout élément de $H(2k+1)$ s'écrit de manière unique $g = e^{tu} \cdot e^{y^p} \cdot e^{x^e}$, $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^k$; E' s'identifie à $\mathbb{R}^k$. La mesure d_g devient la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$, notée dx . Du fait que les fonctions $\underline{\phi} \in \mathcal{H}_{\lambda\tau}^A$ sont de carré intégrable sur $H(2k+1)/H_A$, l'application $R_A : \mathcal{H}_{\lambda\tau}^A \rightarrow L^2(\mathbb{R}^k)$ envoyant $\underline{\phi}$ sur $R_A \underline{\phi}$ avec $(R_A \underline{\phi})(x) = \underline{\phi}(e^{x^e})$ est une isométrie surjective. ■

L'action de $H(2k+1)$ sur $\mathcal{H}_{\lambda\tau}^A$, $(\pi_{\lambda\tau}^A(g') \underline{\phi})(g) = \underline{\phi}(gg')$, $g, g' \in H(2k+1)$, $\underline{\phi} \in \mathcal{H}_{\lambda\tau}^A$ conduit à l'action de $H(2k+1)$ sur $L^2(\mathbb{R}^k)$ par

$$\pi_{\lambda\tau}^A(g) = R_A \pi_{\lambda\tau}^A(g) R_A^{-1} \quad , \quad g \in H(2k+1).$$

Proposition A

1) $(\pi_{\lambda\tau}^A, L^2(\mathbb{R}^k))$ est donnée par :

$$(\pi_{\lambda\tau}^A(e^{tu_0} e^{y'p} e^{x'e}) \phi)(x) = e^{2i\pi\lambda t} e^{\frac{i}{k}\lambda xy'} e^{2i\pi\tau y'} \phi(x+x')$$

où $t \in \mathbb{R}$, $x, x', y' \in \mathbb{R}^k$, $\phi \in L^2(\mathbb{R}^k)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

C'est une représentation continue unitaire irréductible de $H(\lambda k + i)$ sur $L^2(\mathbb{R}^k)$, envoyant e^{tu_0} sur $e^{2i\pi\lambda t} \text{Id}_{L^2(\mathbb{R}^k)}$.

2) Les opérateurs infinitésimaux de la représentation $\pi_{\lambda\tau}^A$ associés aux sous-groupes à un paramètre

$$\pi_{\lambda\tau}^A(e^{tu_0}) = e^{2i\pi t E_{\lambda\tau}}, \quad \pi_{\lambda\tau}^A(e^{y'_j p_j}) = e^{i y'_j Q_{\lambda\tau}^j}, \quad \pi_{\lambda\tau}^A(e^{x'_j e_j}) = e^{i x'_j P_{\lambda\tau}^j}$$

où $t, x'_j, y'_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, k$, nous fournissent, respectivement, les opérateurs essentiellement autoadjoints

$$E_{\lambda\tau} = \lambda \text{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)}, \quad Q_{\lambda\tau}^j = \lambda x_j + 2\pi\hbar\tau_j, \quad P_{\lambda\tau}^j = \frac{\hbar}{t} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

ayant pour domaine commun de définition l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ et satisfaisant $[Q_{\lambda\tau}^j, P_{\lambda\tau}^j] = i\hbar\lambda \text{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)}$ sur cet espace.

Démonstration :

$$\begin{aligned} 1) \quad & (\pi_{\lambda\tau}^A(e^{tu_0} e^{y'p} e^{x'e}) \phi)(x) = (R_A \pi_{\lambda\tau}^A(e^{tu_0} e^{y'p} e^{x'e}) R_A^{-1} \phi)(x) = \\ & (\pi_{\lambda\tau}^A(e^{tu_0} e^{y'p} e^{x'e}) R_A^{-1} \phi)(x'e) = (R_A^{-1} \phi)(e^{x'e} e^{tu_0} e^{y'p} e^{x'e}) = \\ & (R_A^{-1} \phi)(e^{(t + \frac{2}{4\pi\hbar} \sigma_0(xe, y'p))u_0} e^{y'p} e^{(x+x')e}) = e^{2i\pi\lambda t} e^{\frac{2}{4\pi\hbar} \sigma_0(xe, y'p)u_0} e^{2i\pi\tau y'} \cdot \\ & \cdot (R_A^{-1} \phi)(e^{(x+x')e}) = e^{2i\pi\lambda t} e^{\frac{i}{k}\lambda xy'} e^{2i\pi\tau y'} \phi(x+x'). \end{aligned}$$

Continuité et unitarité sous standards. Pour l'irréductibilité, voir [Car.].

2) (§I.5. Déf. 29) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ (c.f. [Car.])

$$\frac{\partial}{\partial t} (\pi_{\lambda\tau}^A(e^{tu_0}) \varphi)(x) \Big|_{t=0} = 2i\pi\lambda \varphi(x) \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\pi_{\lambda\tau}^A(e^{tu_0})) \Big|_{t=0} = 2i\pi E_{\lambda\tau} \quad \text{donnent} \quad E_{\lambda\tau} = \lambda \text{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j'} (\pi_{\lambda\tau}^A (e^{i y_j' p_j} \phi)) (x_j) \Big|_{y_j'=0} = \left(\frac{i}{\hbar} \lambda x_j + 2\pi\tau y_j \right) \phi(x_j) \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j'} (\pi_{\lambda\tau}^A (e^{i y_j' p_j})) \Big|_{y_j'=0} = \frac{i}{\hbar} Q_{\lambda\tau}^j \quad \text{donnent} \quad Q_{\lambda\tau}^j = \lambda x_j + 2\pi\tau y_j.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j'} (\pi_{\lambda\tau}^A (e^{i x_j' p_j} \phi)) (x_j) \Big|_{x_j'=0} = \frac{\partial}{\partial x_j'} \phi(x_j + x_j') \Big|_{x_j'=0} = \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x_j) \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j'} (\pi_{\lambda\tau}^A (e^{i x_j' p_j})) \Big|_{x_j'=0} = \frac{i}{\hbar} P_{\lambda\tau}^j \quad \text{donnent} \quad P_{\lambda\tau}^j = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Pour le domaine de définition, voir réf. [P.] ■

Par analogie à la construction de la représentation induite à droite de $H(2k+1)$ par le caractère $\chi_{\lambda\tau}^A$ de H_A , on a

Proposition A'

1') La représentation continue unitaire irréductible induite à gauche de $H(2k+1)$ par le caractère $\chi_{\lambda\tau}^A$ de H_A , notée $(\pi_{\lambda\tau}^{'A}, L^1(\mathbb{R}^k))$, est donnée par :

$$(\pi_{\lambda\tau}^{'A} (e^{i t u} \cdot e^{i y' p} e^{i x' e})) \phi(x) = e^{i \pi \lambda t} e^{-i \frac{\lambda}{\hbar} x y'} e^{i \pi \tau y'} \phi(x - x')$$

où $t \in \mathbb{R}$, $x, x', y' \in \mathbb{R}^k$, $\phi \in L^1(\mathbb{R}^k)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Elle envoie $e^{i t u}$ sur $e^{i \pi \lambda t} I_d L^1(\mathbb{R}^k)$.

2') Les opérateurs infinitésimaux de la représentation $\pi_{\lambda\tau}^{'A}$ associés aux sous-groupes à un paramètre définis sous 2) nous fournissent, respectivement, les opérateurs essentiellement autoadjoints

$$E_{\lambda\tau} = \lambda I_d_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)}, \quad Q_{\lambda\tau}^j = -\lambda x_j + 2\pi\tau y_j, \quad P_{\lambda\tau}^j = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j=1, \dots, k)$$

ayant pour domaine commun de définition l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$.

Démonstration : Par analogie à celle de la Proposition A ■

Remarque 2 : Pour $\lambda = 1$ et $\tau = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, les opérateurs $Q_j^1 = x_j$ et $P_{x_j}^1 = \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$, de la Proposition A sont exactement les opérateurs de la représentation de Schrödinger dans l'espace de configuration. C'est pour cette raison que l'on appelle aussi la représentation de type "position" "représentation de Schrödinger".

B. Représentation de type "moment de $\mathbb{H}(2k+1)$ ".

Soient à nouveau $E = \{y^p; y \in \mathbb{R}^k\}$ et $E' = \{x^e; x \in \mathbb{R}^k\}$.

Soit $H_B = \{e^{t u_0} e^{x^e}; t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^k\}$ est un sous-groupe abélien, normal de $\mathbb{H}(2k+1)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, fixé. Les caractères de H_B envoyant $e^{t u_0}$ sur $e^{2\pi\lambda t}$ sont de la forme

$$\chi_{\lambda x}^B(e^{t u_0} e^{x^e}) = e^{2\pi\lambda t} e^{2\pi i x x} \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}^k \quad \text{et} \quad x x = \sum_{j=1}^k x_j x_j.$$

Notons $(\mathbb{T}_{\lambda x}^B, \mathcal{H}_{\lambda x}^B)$ la représentation induite à droite de $\mathbb{H}(2k+1)$ par le caractère $\chi_{\lambda x}^B$ de H_B .

Par définition $\mathcal{H}_{\lambda x}^B$ est l'ensemble des fonctions ϕ sur $\mathbb{H}(2k+1)$ de carré intégrable modulo H_B et satisfaisant la relation :

$$\phi(hg) = \chi_{\lambda x}^B(h) \phi(g), \quad h \in H_B \quad \text{et} \quad g \in \mathbb{H}(2k+1).$$

Donc :

$$\phi(e^{t u_0} e^{y^p} e^{x^e}) = \phi\left(e^{\left(t + \frac{2}{4\pi k} \sigma_e(y^p, x^e)\right) u_0} e^{x^e} e^{y^p}\right) = e^{2\pi\lambda t} e^{-\frac{2}{k} \lambda x y} e^{2\pi i x x} \phi(e^{y^p})$$

$$\text{q.q.s.} \quad g = e^{t u_0} e^{y^p} e^{x^e} \in \mathbb{H}(2k+1).$$

On peut définir un isomorphisme R_B de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\lambda x}^B$ sur $L^2(\mathbb{R}^k)$:

$$(R_B \phi)(y) = \phi(e^y)$$

Démonstration : Par analogie au cas A ■

L'action de $\|H(2k+1)$ sur $\mathcal{A}_{\lambda\kappa}^3, (\pi_{\lambda\kappa}^3/\phi, \phi)(y) = \phi(y, y')$, $y, y' \in H(2k+1), \phi \in \mathcal{P}_{\lambda\kappa}^B$, conduit à l'action de $\|H(2k+1)$ sur $L^1(\mathbb{R}^k)$ par $\pi_{\lambda\kappa}^B(y) = R_B \pi_{\lambda\kappa}^A(y) R_B^{-1}$, $y \in H(2k+1)$.

Proposition B

1) $(\pi_{\lambda\kappa}^B, L^1(\mathbb{R}^k))$ est donnée par :

$$(\pi_{\lambda\kappa}^B(e^{t u_0} e^{y' p} e^{x' e}) \phi)(y) = e^{2i\pi\lambda t} e^{-\frac{i}{\kappa}\lambda x' y'} e^{-\frac{i}{\kappa}\lambda x' y} e^{2i\pi x x'} \phi(y+y')$$

où $t \in \mathbb{R}$, $x', y, y' \in \mathbb{R}^k$, $\phi \in L^1(\mathbb{R}^k)$; c'est une représentation continue unitaire irréductible de $\|H(2k+1)$ sur $L^1(\mathbb{R}^k)$ envoyant $e^{t u_0}$ sur $e^{2i\pi\lambda t} \text{Id}_{L^1(\mathbb{R}^k)}$, pour $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

2) Les opérateurs infinitésimaux de la représentation $\pi_{\lambda\kappa}^B$ associés aux sous-groupes à un paramètre

$$\pi_{\lambda\kappa}^B(e^{t u_0}) = e^{2i\pi t E_{\lambda\kappa}}, \pi_{\lambda\kappa}^B(e^{y' p_j}) = e^{\frac{i}{\kappa} y' Q_{\lambda\kappa}^j}, \pi_{\lambda\kappa}^B(e^{x' e_j}) = e^{\frac{i}{\kappa} x' P_{\lambda\kappa}^j}$$

où $t, x'_j, y'_j \in \mathbb{R}$, $j=1, 2, \dots, k$, nous fournissent, respectivement, les opérateurs essentiellement autoadjoints

$$E_{\lambda\kappa} = \lambda \text{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)}, Q_{\lambda\kappa}^j = \frac{\hbar}{t} \frac{\partial}{\partial y_j}, P_{\lambda\kappa}^j = -\lambda y_j + 2\pi\hbar x_j \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

ayant pour domaine commun de définition $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ et satisfaisant $[Q_{\lambda\kappa}^j, P_{\lambda\kappa}^j] = i\hbar \lambda \text{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} & (\pi_{\lambda\kappa}^B(e^{t u_0} e^{y' p} e^{x' e}) \phi)(y) = (R_B \pi_{\lambda\kappa}^A(e^{t u_0} e^{y' p} e^{x' e}) R_B^{-1} \phi)(y) = \\ & (\pi_{\lambda\kappa}^A(e^{t u_0} e^{y' p} e^{x' e}) R_B^{-1} \phi)(e y' p) = (R_B^{-1} \phi)(e y' p e^{t u_0} e^{y' p} e^{x' e}) = (R_B^{-1} \phi)(e^{t u_0} e^{(y+y') p} e^{x' e}) = \\ & (R_B^{-1} \phi)(e^{(t + \frac{2}{\sqrt{\pi\kappa}} \sigma_0((y+y') p, x' e)) u_0} e^{x' e} e^{(y+y') p}) = e^{2i\pi\lambda(t + \frac{2}{\sqrt{\pi\kappa}} \sigma_0((y+y') p, x' e))} e^{2i\pi x x'} \cdot \\ & \cdot (R_B^{-1} \phi)(e^{y+y'}) = e^{2i\pi\lambda t} e^{-\frac{i}{\kappa}\lambda x'(y+y')} e^{2i\pi x x'} \phi(y+y') \end{aligned}$$

Les propriétés de $\pi_{\lambda\kappa}^B$ se démontrent par analogie à celles de la Proposition A ■

Proposition B'

1') La représentation continue unitaire irréductible induite à gauche de $H/(2k+1)$ par le caractère $\chi_{\lambda\kappa}^B$ de H_B , notée $(\pi_{\lambda\kappa}^B, L^2(\mathbb{R}^k))$, est donnée par :

$$(\pi_{\lambda\kappa}^B(e^{t u_0} e^{y' p} e^{x' e}) \phi)(y) = e^{2\pi i \lambda t} e^{i \frac{\lambda}{\kappa} x' y} e^{2\pi i \kappa x' y} e^{-i \frac{\lambda}{\kappa} x' y'} \phi(y - y')$$

où $t \in \mathbb{R}$, $x', y, y' \in \mathbb{R}^k$, $\phi \in L^2(\mathbb{R}^k)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Elle envoie $e^{t u_0}$ sur $e^{2\pi i \lambda t} \text{Id}_{L^2(\mathbb{R}^k)}$.

2') Les opérateurs infinitésimaux de la représentation $\pi_{\lambda\kappa}^B$ associés aux sous-groupes à un paramètre définis sous 2) nous fournissent les opérateurs essentiellement autoadjoints

$$E_{\lambda\kappa} = \lambda \text{Id}_{\mathcal{J}(\mathbb{R}^k)}, Q_{\lambda\kappa}^j = -\frac{\kappa}{i} \frac{\partial}{\partial y_j}, P_{\lambda\kappa}^j = \lambda y_j + 2\pi i \kappa x_j \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

ayant pour domaine commun de définition $\mathcal{J}(\mathbb{R}^k)$.

Démonstration : Par analogie au cas B ■

Remarque 3 : Pour $\lambda=1$ et $\kappa=0$, les opérateurs $Q_0^j = -\frac{\kappa}{i} \frac{\partial}{\partial y_j}$ et $P_0^j = y_j$, $j=1, 2, \dots, k$, de la proposition B', sont exactement les opérateurs de la représentation de Schrödinger dans l'espace des impulsions.

C. Représentation de type "réseau" de $H/(2k+1)$.

- Définition 5 : Soit l'espace symplectique $(\mathbb{R}^{2k}, \sigma)$. Un sous-espace vectoriel Λ de $\mathbb{R}^{2k}$ tel que $i\sigma(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z}$ est appelé un RESEAU. L'ensemble Λ' de tous les $v \in \mathbb{R}^{2k}$ tels que $i\sigma(v, \ell)$ soit un entier pour tout $\ell \in \Lambda$ est appelé RESEAU COMPLEMENTAIRE de Λ dans $(\mathbb{R}^{2k}, \sigma)$. Lorsque $\Lambda = \Lambda'$, le réseau Λ s'appelle RESEAU PRINCIPAL de $(\mathbb{R}^{2k}, \sigma)$.

Soient l'espace symplectique $(\mathbb{R}^{2k}, \frac{1}{4\pi k} \sigma_0)$ et sa base symplectique $\{e_j, f_j; j=1, 2, \dots, k\}$. L'ensemble $L = \left\{ \ell = \sum_{j=1}^k (r_j a_j + s_j b_j; r_j, s_j \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \ell = ra + sb; r, s \in \mathbb{Z}^k \right\}$ où $a_j = e_j$ et $b_j = 2\pi k f_j$, $j=1, 2, \dots, k$, est un réseau principal de $(\mathbb{R}^{2k}, \frac{1}{4\pi k} \sigma_0)$.

Soit $H_C = \{e^{tu_0} e^\ell; t \in \mathbb{R}, \ell \in L\}$; H_C est un sous-groupe normal de $H/(2k+1)$, non abélien.

Démonstration : Soient $g = e^{tu_0} e^v \in H/(2k+1)$ et $g' = e^{t'u_0} e^{\ell} \in H_C$. On a $gg'g^{-1}g'^{-1} = e^{\frac{1}{2\pi k} \sigma_0(v, \ell) u_0}$ appartient à $\mathbb{Z}$ ■

Recherche des caractères de H_C

Considérons le sous-groupe de H_C engendré par les commutateurs $gg'g^{-1}g'^{-1}$, $g, g' \in H_C$; notons-le Δ . Nous avons

i) $\Delta = \{e^{nu_0}; n \in \mathbb{Z}\}$; c'est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

ii) Un caractère χ de H_C vaut 1 sur Δ .

De i) et ii) on déduit que les caractères de H_C sont exactement ceux du groupe abélien H_C/Δ , et qu'ils envoient e^{tu_0} sur $\chi_m(e^{tu_0}) = e^{i\pi m t}$ où $m \in \mathbb{Z}$, $\chi_m \in \hat{\mathbb{Z}}$. Les divers prolongements des χ_m à H_C nous fournissent l'ensemble des caractères de H_C .

Lemme 1

Soit $t \in \mathbb{R}$, $\ell = ra + sb \in L$.

L'ensemble des Ψ_{mF} définis par $\Psi_{mF}(e^{tu_0} e^\ell) = e^{i\pi m t} e^{i\pi F(\ell)}$ avec m parcourant $\mathbb{Z}$ et

$$F(\ell) = \begin{cases} = 0 & \text{si } m \text{ est pair} \\ = F'(\ell) = rs & \text{ou } F''(\ell) = rs + r_1^2 + s_1^2 & \text{si } m \text{ est impair, où} \\ & rs = \sum_{j=1}^k r_j s_j \end{cases}$$

forme l'ensemble des représentants (un par classe) des classes d'équivalence de tous les caractères de H_C .

Démonstration :

1) Soit $\chi_{m\zeta} \in \hat{H}_C$ donné par $\chi_{m\zeta}(e^{tu} \cdot e^{\ell}) = e^{i2\pi m^{-1}\zeta(\ell)}$, $t \in \mathbb{R}, \ell \in L$.

De la définition d'un caractère $\chi_{m\zeta}(e^{tu} \cdot e^{\ell}) \chi_{m\zeta}(e^{t'u'} \cdot e^{\ell'}) = \chi_{m\zeta}(e^{tu} \cdot e^{\ell} e^{t'u'} \cdot e^{\ell'})$ et $|\chi_{m\zeta}(e^{tu} \cdot e^{\ell})| = 1$; on en tire que

$$\zeta(\ell)\zeta(\ell') = e^{i2\pi \frac{m}{4\pi k} \sigma_0(\ell, \ell')} \zeta(\ell + \ell') \quad \text{et} \quad |\zeta(\ell)| = 1.$$

D'où $\zeta(\ell) = e^{i\pi F(\ell)}$ avec $F(\ell)$ satisfaisant

$$F(\ell + \ell') = F(\ell) + F(\ell') - \frac{m}{2\pi k} \sigma_0(\ell, \ell') + 2n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

2) Cas de m pair : $\frac{1}{2\pi k} \sigma_0(\ell, \ell')$ appartenant à $\mathbb{Z}$ q.q.s. $\ell, \ell' \in L$, (2.1) devient $F(\ell + \ell') \equiv F(\ell) + F(\ell') \pmod{2}$, dont $F=0$ est une solution particulière.

Cas de m impair : $m = 2\nu + 1$, $\nu \in \mathbb{Z}$; donc $m \equiv 1 \pmod{2}$.

Réduite modulo 2, la forme bilinéaire alternée $\frac{1}{2-k} \sigma_0$ devient une forme bilinéaire symétrique. Utilisant la théorie de classification des formes quadratiques associées à une forme bilinéaire symétrique selon leur invariant de C. Arf (Appendice 1, p. 110 de [M.H]), on a les deux solutions à valeurs entières suivantes de (2.1) : $F'(\ell) = r s$ et $F''(\ell) = r s + r_2^2 + s_2^2$, $\ell = r a + s b \in L$ [Car.] ■

Notons $(\pi_{mF}^C, \mathcal{H}_{mF}^C)$ la représentation induite à droite de $H(2k+1)$, par le caractère Ψ_{mF} de H_C ; $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, fixé.

Par définition $\mathcal{H}_{mF}^C$ est l'ensemble des fonctions boréliennes ϕ sur $H(2k+1)$ de carré intégrable modulo H_C et satisfaisant la relation

$$\phi(yg) = \Psi_{mF}(y) \phi(g), \quad y \in H_C \quad \text{et} \quad g \in H(2k+1).$$

Donc $\phi(e^{tu} \cdot e^v) = e^{i2\pi m t} \phi(e^v)$ q.q.s. $g = e^{tu} \cdot e^v \in H(2k+1)$.

L'application R_C définie par $(R_C \phi)(v) = \phi(e^v)$ établit un isomorphisme entre les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_{mF}^C \ni \phi$ et

$$\mathcal{H}_{mF}^C = \left\{ \phi : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{C} \text{ t.q.} \right.$$

i) ϕ est borélienne sur $\mathbb{R}^{2k}$.

ii) $\int_G |\phi(v)|^2 dv < +\infty$, pour chaque cellule élémentaire G de L .

iii) ϕ est quasi périodique sur le réseau L

$$\phi(v+\ell) = e^{-\frac{im}{2k}\sigma_0(\ell,v)} e^{i\pi F(\ell)} \phi(v), \quad v \in \mathbb{R}^{2k}, \ell \in L. \quad \left. \right\}$$

Démonstration de :

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad (R_C \underline{\phi})(v+\ell) &= \underline{\phi}(e^{v+\ell}) = \underline{\phi}\left(e^{-\frac{1}{4\pi k}\sigma_0(\ell,v)u_0} e^\ell e^v\right) = \\ &= e^{2i\pi m\left(-\frac{1}{4\pi k}\sigma_0(\ell,v)\right)} e^{i\pi F(\ell)} (R_C \underline{\phi})(v) \end{aligned}$$

ii) L'espace $H(2k+1)/H_C$ s'identifie à une cellule élémentaire du réseau L isomorphe à $[0,1]^k \times [0,2\pi k]^k$. La mesure d_g devient la mesure de Lebesgue sur G , notée $dv = dx dy$. Du fait que les fonctions $\underline{\phi} \in \mathcal{H}_{mF}^C$ sont de carré intégrable sur $H(2k+1)/H_C$, l'application $R_C : \mathcal{H}_{mF}^C \rightarrow \mathcal{H}_{mF}^C$ envoyant $\underline{\phi}$ sur $R_C \underline{\phi}$ avec $(R_C \underline{\phi})(v) = \underline{\phi}(e')$ est une isométrie surjective ■

L'action de $H(2k+1)$ sur $\mathcal{H}_{mF}^C$, $(\pi_{mF}^C(g') \underline{\phi})(g) = \underline{\phi}(gg')$, $g, g' \in H(2k+1)$, $\underline{\phi} \in \mathcal{H}_{mF}^C$, conduit à l'action de $H(2k+1)$ sur $\mathcal{H}_{mF}^C$ par

$$\pi_{mF}^C(g) = R_C \pi_{mF}^C(g) R_C^{-1}, \quad g \in H(2k+1)$$

Proposition C

1) $(\pi_{mF}^C, \mathcal{H}_{mF}^C)$ est donnée par :

$$(\pi_{mF}^C(e^{tu_0} e^{v'}) \phi)(v) = e^{i\pi m t} e^{i \frac{\pi}{4k} \sigma_0(v, v')} \phi(v+v')$$

où $t \in \mathbb{R}$, $v, v' \in \mathbb{R}^{2k}$, $\phi \in \mathcal{H}_{mF}^C$.

C'est une représentation continue unitaire irréductible de $H(2k+1)$ sur $\mathcal{H}_{mF}^C$, envoyant e^{tu_0} sur $e^{i\pi m t} \text{Id}_{\mathcal{H}_{mF}^C}$, $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

2) Les opérateurs infinitésimaux de la représentation π_{mF}^C associés aux sous-groupes à un paramètre :

$$\pi_{mF}^C(e^{tu_0}) = e^{i\pi m t} E_{mF}, \quad \pi_{mF}^C(e^{y_j' p_j}) = e^{i \frac{\pi}{k} y_j' Q_{mF}^j}, \quad \pi_{mF}^C(e^{x_j' e_j}) = e^{i \frac{\pi}{k} x_j' P_{mF}^j}$$

où $t, x_j', y_j' \in \mathbb{R}$, $j=1, 2, \dots, k$, nous fournissent, respectivement, les opérateurs essentiellement autoadjoints

$$E_{mF} = m \text{Id}_{\mathcal{H}_{\pi_{mF}^C}^\infty}, \quad Q_{mF}^j = \frac{m}{2} x_j + \frac{k}{i} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad P_{mF}^j = -\frac{m}{2} y_j + \frac{k}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

($j=1, 2, \dots, k$)

ayant pour domaine commun de définition $\mathcal{H}_{\pi_{mF}^C}^\infty$ et satisfaisant

$$[Q_{mF}^j, P_{mF}^j] = i k m \text{Id}_{\mathcal{H}_{\pi_{mF}^C}^\infty}.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} (\pi_{mF}^C(e^{tu_0} e^{v'}) \phi)(v) &= (R_C \pi_{mF}^C(e^{tu_0} e^{v'}) R_C^{-1} \phi)(v) = (\pi_{mF}^C(e^{tu_0} e^{v'}) R_C^{-1} \phi)(e^v) = \\ (R_C^{-1} \phi)(e^v e^{tu_0} e^{v'}) &= (R_C^{-1} \phi)\left(e^{\left(t + \frac{1}{4\pi k} \sigma_0(v, v')\right) u_0} e^{v+v'}\right) = e^{i\pi m \left(t + \frac{1}{4\pi k} \sigma_0(v, v')\right)} \phi(v+v'). \end{aligned}$$

Continuité et unitarité sont standards. Pour l'irréductibilité, voir [Car.] et [Ma.4]. Le point 2) se démontre par simple calcul, voir démonstration de la Prop. A, point 2) ■

Proposition C'

1') La représentation continue unitaire irréductible induite à gauche de $\mathbb{H}/2k$, par le caractère χ_m de H_C , notée $(\pi_{mF}^C, \mathcal{H}_{mF}^C)$, est donnée par :

$$(\pi_{mF}^C(e^{tu} \cdot e^{v'})\phi)(v) = e^{2i\pi mt} e^{i\frac{m}{2k}\sigma_0(v',v)} \phi(v-v')$$

où $t \in \mathbb{R}$, $v, v' \in \mathbb{R}^{2k}$, $\phi \in \mathcal{H}_{mF}^C$, $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Elle envoie e^{tu} sur $e^{2i\pi mt} \text{Id}_{\mathcal{H}_{mF}^C}$.

2') Les opérateurs infinitésimaux de la représentation π_{mF}^C associés aux sous-groupes à un paramètre définis sous 2) nous fournissent les opérateurs essentiellement autoadjoints

$$E_{mF} = m \text{Id}_{\mathcal{H}_{mF}^C}, \quad Q_{mF}^j = -\frac{m}{2}x_j - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad P_{mF}^j = \frac{m}{2}y_j - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ (j=1,2,\dots,k)$$

ayant pour domaine commun de définition $\mathcal{H}_{mF}^{\infty,C}$.

Démonstration : Par analogie à la proposition C ■

Remarque 4 : Les opérateurs $P_{mF}^j = y_j - i\frac{\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $Q_{mF}^j = x_j + i\frac{\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial y_j}$ ($j=1,2,\dots,k$)

de la "représentation de Wigner" (voir réf. (J.F.)), proviennent des opérateurs infinitésimaux de la représentation de type "réseau" π_{mF}^C de $\mathbb{H}(2k+1)$, associés aux sous-groupes à un paramètre

$$\pi_{mF}^C(e^{y_j' \rho_j}) = e^{-\frac{2i}{\hbar} y_j' Q_{mF}^j}, \quad \pi_{mF}^C(e^{x_j' e_j}) = e^{\frac{2i}{\hbar} x_j' P_{mF}^j} \quad (j=1,2,\dots,k)$$

pour $m=-4$.

Remarque 5 : On souligne ici que la construction de la représentation de type "réseau" de $\mathbb{H}(2k+1)$ n'a lieu que pour $\lambda = m \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Remarque 6 : Si, partant d'un réseau non principal, on suit le chemin de construction fait pour $\mathcal{L}$ ci-dessus, on obtient une représentation de $H(2k+1)$ réductible [Car.] et §14 de [Ma.4].

Remarque 7 : L'algèbre de Lie du sous-groupe $H_{\mathbb{C}}$ de $H(2k+1)$, dont on est parti pour induire, n'est pas une polarisation positive (car $\frac{1}{2\pi k} \sigma$, restreinte à $\mathcal{L}$ n'est pas identiquement nulle, ce qui entraîne que $\mathcal{L}$ n'est pas un sous-espace totalement isotrope maximal de $\mathbb{R}^{2k}$). C'est la raison pour laquelle la méthode de la représentation holomorphe induite construite à partir d'une polarisation positive n'est pas exposée dans ce travail.

D. Représentation de type "Bargmann-Fock-Segal" (B.F.S.) de $H(2k+1)$.

([Bar.3], [Fo.], [Se.]). Pour les définitions qui suivent, voir [K.N.].

- Définition 6 : a) Soit (V, σ) un espace symplectique de dimension $2k$. Une STRUCTURE COMPLEXE sur V est une application linéaire $J: V \longrightarrow V$ telle que $J^2 = -Id_V$; elle est dite ADMISSIBLE par rapport à σ si :
 - i) $\sigma(Jv, Jv') = \sigma(v, v'), \forall v, v' \in V$;
 - ii) $\sigma(v, Jv) \geq 0, \forall v \in V$.
- b) On note V_J l'espace vectoriel complexe, qui en tant qu'ensemble et que groupe est égal à V , muni d'une multiplication scalaire (complexe) définie par : $(a + ib)v = av + bJv, a, b \in \mathbb{R}, v \in V$. $\dim_{\mathbb{C}} V_J = k$.
- c) Un PRODUIT SCALAIRE HERMITIEN sur V_J est un produit scalaire h tel que : $h(Jv, Jv') = h(v, v'), \forall v, v' \in V_J$.

Exemple : Soit (V, σ) un espace symplectique, muni d'une structure complexe J admissible par rapport à σ . $h(v, v') = \sigma(v, Jv') + i\sigma(v, v'), v, v' \in V_J$, est l'unique produit scalaire hermitien sur V_J , ayant σ comme partie imaginaire. On dit alors que l'espace V est muni de géométries symplectique et euclidienne [D.G].

Lemme 2

Soit h un produit scalaire hermitien sur V_J .

Alors : i) $h(Jv, v) = 0$ q.q.s. $v \in V_J$

ii) Il existe des éléments $e_1, \dots, e_k$ de V_J t.q.

$\{e_1, \dots, e_k, Je_1, \dots, Je_k\}$ soit une base orthonormale de V_J par rapport au produit scalaire hermitien h .

Démonstration :

i) On a : $h(Jv, Jv') = h(v, v')$ q.q.s. $v, v' \in V_J$. Pour $v' = Jv$,
 $h(Jv, J(Jv)) = -h(Jv, v) = h(v, Jv)$. Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel étant symétrique, cela entraîne que $h(Jv, v) = 0$ q.q.s. $v \in V_J$.

ii) Par récurrence sur la dimension de V_J .

Soit $e_1 \in V_J$, t.q. $h(e_1, e_1) = 1$. Par i) $h(Je_1, e_1) = 0$. Notons W le sous-espace de V_J engendré par $\{e_1, Je_1\}$ et $W^\perp$ son complémentaire orthogonal dans V_J ; $W^\perp$ est invariant par J , et $V_J = W \oplus W^\perp$. Par l'hypothèse d'induction, $W^\perp$ possède une base orthonormale de la forme $\{e_2, \dots, e_k, Je_2, \dots, Je_k\}$ ■

Remarque 8 : Pour $h(v, v') = \sigma(v, Jv') + i\sigma(v, v')$, $v, v' \in V_J$, définissant $\varphi_j = Je_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, la base orthonormale de V_J par rapport à h est exactement la base symplectique de (V, σ) .

● Définition 7 : a) Soit V un espace vectoriel réel. L'ensemble $V \times V$ muni de la loi de composition interne :

$$((v_1, v_2), (v_3, v_4)) \longmapsto (v_1 + v_3, v_2 + v_4)$$

et de la loi de composition externe :

$$(a + ib)(v, v') \longmapsto (av - bv', av' + bv), a, b \in \mathbb{R}$$

est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, appelé COMPLEXIFIÉ de V et noté V^c .

● Définition 7 : a) L'espace vectoriel réel SOUS-JACENT à V^c peut être identifié à $V \oplus iV$, et V à $V_r = \{w \in V^c; w = \bar{w}\}$.
(suite)

b) Soit (V, σ) un espace symplectique. σ prolongé par bilinéarité complexe à V^c est noté σ_c .

c) Soit (V, σ) un espace symplectique muni d'une structure complexe J admissible par rapport à σ . J se prolonge de manière unique en un endomorphisme linéaire complexe de V^c , noté J_c . On a $J_c^2 = -Id_{V^c}$. Par conséquent les valeurs propres de J_c sont $\pm i$. Posons

$$W_{J_c}^+ = \{w \in V^c; J_c w = iw\} \text{ et } W_{J_c}^- = \{w \in V^c; J_c w = -iw\}$$

Soit $\{e_1, \dots, e_k, J e_1, \dots, J e_k\}$ la base de V_J orthonormale par rapport au produit scalaire hermitien h_σ défini par : $h_\sigma(v, v') = \sigma(v, J v') + i \sigma(v, v')$, $v, v' \in V_J$.

$$\text{Posons } \varphi_j = J e_j; a_j^+ = \frac{e_j - i \varphi_j}{2}; a_j^- = \frac{e_j + i \varphi_j}{2}; j=1, 2, \dots, k.$$

Lemme 3

Soit (V, σ) un espace symplectique J admissible par rapport à σ .

$$1) W_{J_c}^+ = \left\{ w_+ = \frac{1}{2}(v - i J v); v \in V_J \right\}; \dim_{\mathbb{C}} W_{J_c}^+ = k \text{ et } \sigma_c(W_{J_c}^+, W_{J_c}^+) = \{0\}$$

$$W_{J_c}^- = \left\{ w_- = \frac{1}{2}(v + i J v); v \in V_J \right\}; \dim_{\mathbb{C}} W_{J_c}^- = k \text{ et } \sigma_c(W_{J_c}^-, W_{J_c}^-) = \{0\}$$

2) La conjugaison complexe dans V^c définit un isomorphisme linéaire réel entre $W_{J_c}^+$ et $W_{J_c}^-$.

3) $V^c = W_{J_c}^+ \oplus W_{J_c}^-$ (somme directe d'espaces vectoriels complexes).

4) $\varphi: W_{J_c}^+ \times W_{J_c}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ défini par $\varphi(w_+, w'_+) = 2i \sigma_c(\bar{w}_+, w'_+)$ est un produit scalaire hermitien sur $W_{J_c}^+$.

$\{a_1^+, \dots, a_k^+\}$ (respectivement $\{a_1^-, \dots, a_k^-\}$) est une base orthonormale de $W_{J_c}^+$ (respectivement $W_{J_c}^-$) par rapport au produit scalaire φ

(respectivement $\bar{\varphi}$ défini par conjugaison complexe

$$\bar{\varphi}(w_-, w'_-) = \varphi(w_+, w'_+)).$$

Démonstration :

- 1) L'application $\alpha: V_J \longrightarrow W_{J_c}^+$ envoyant v sur $w_+ = \frac{1}{2}(v - iJv)$ est un isomorphisme ; α^{-1} envoie $w_+ \in W_{J_c}^+$ sur $v = w_+ + \overline{w_+}$.
Soit $w_+, w'_+ \in W_{J_c}^+$; $\sigma_c(w_+, w'_+) = \frac{1}{4} \sigma_c(v - iJv, v' - iJv') = \frac{1}{4} (\sigma_c(v, v') - i\sigma_c(v, Jv') - i\sigma_c(Jv, v') - \sigma_c(Jv, Jv')) = 0$.
- 2) et 3) Clairs.

- 4) i) $\varphi(a(w_+ + w'_+), b(w_+'' + w_+''')) = \overline{a}b(\varphi(w_+, w_+''') + \varphi(w_+, w_+''') + \varphi(w_+', w_+''') + \varphi(w_+', w_+'''))$
q.q.s $a, b \in \mathbb{C}$ et $w_+, w'_+, w_+'', w_+''' \in W_{J_c}^+$,
découle de la définition de φ et du fait que σ_c est bilinéaire.
- ii) Soit $w_+ = \frac{1}{2}(v - iJv) \in W_{J_c}^+$, $v \in V_J$,
 $\overline{\varphi(w_+, w_+')} = 2i\sigma_c(\overline{w_+}, w_+') = -2i\sigma_c(w_+, \overline{w_+}') = 2i\sigma_c(\overline{w_+}', w_+) = \varphi(w_+', w_+)$; $\varphi(w_+, w_+) = 2i\sigma_c(\overline{w_+}, w_+) = 2i\sigma_c(\frac{1}{2}(v - iJv), \frac{1}{2}(v - iJv)) = \frac{i}{2}(\sigma_c(v, -iJv) + \sigma_c(-iJv, v)) = \sigma_c(v, Jv) \geq 0$ puisque J est admissible par rapport à σ .
- iii) φ est non dégénérée car σ_c l'est.
 $\varphi(a_j^+, a_\ell^+) = 2i\sigma_c(\frac{e_j^+ - i p_j^+}{2}, \frac{e_\ell^+ - i p_\ell^+}{2}) = \frac{i}{2}(-2i\sigma_c(e_j^+, p_\ell^+)) = \delta_{j\ell}$ ■

Remarque 9 :

- (a) La base symplectique de $(V^c, 2i\sigma_c)$ est exactement $\{a_1^-, \dots, a_h^-, a_1^+, \dots, a_h^+\}$.
Dans cette base $w \in V^c$ se décompose en
 $w = \sum_{j=1}^h (z_j a_j^+ + z'_j a_j^-) = z a^+ + z' a^- = (z, z')$
 $z, z' \in \mathbb{C}^h$ et $z a^+ = \sum_{j=1}^h z_j a_j^+ = (z) \in W_{J_c}^+$,
 $z' a^- = \sum_{j=1}^h z'_j a_j^- = (z') \in W_{J_c}^-$.
- (b) Soient $v, v' \in V_J$ et $w_+ = \frac{1}{2}(v - iJv)$, $w'_+ = \frac{1}{2}(v' - iJv')$ leurs correspondants dans $W_{J_c}^+$. On a $h_+(v, v') = \varphi(w_+, w'_+)$.

Schématiquement nous avons les ensembles :

$$V = \left\{ v = \sum_{j=1}^k (x_j e_j + y_j f_j) ; x_j, y_j \in \mathbb{R}, j=1, 2, \dots, k \right\} ; v = (x, y) \in V$$

$$V_j = \left\{ v = \sum_{j=1}^k z_j e_j, z_j \in \mathbb{C}, j=1, 2, \dots, k \right\}, v = (z) \in V_j$$

$$V^c = \left\{ w = \sum_{j=1}^k (z_j a_j + \bar{z}_j \bar{a}_j) ; z_j, \bar{z}_j \in \mathbb{C}, j=1, 2, \dots, k \right\}, w = (z, \bar{z}) \in V^c$$

$$V_r^c = \left\{ w_r = \sum_{j=1}^k (z_j a_j^+ + \bar{z}_j \bar{a}_j^-) ; z_j \in \mathbb{C}, j=1, 2, \dots, k \right\}, w_r = (z, \bar{z}) \in V_r^c$$

$$W_{j_c}^+ = \left\{ w_+ = \sum_{j=1}^k z_j a_j^+ ; z_j \in \mathbb{C}, j=1, 2, \dots, k \right\} ; w_+ = (z) \in W_{j_c}^+$$

Liés par les isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & V_r^c \\ \uparrow \alpha_1 & \begin{array}{c} (x, y) \xrightarrow{\alpha_1} (x + iy, x - iy) \\ \downarrow \alpha_1 \\ (x + iy) \xrightarrow{\alpha_1} (x + iy) \end{array} & \uparrow \alpha_2 \\ V_j & \xrightarrow{\quad} & W_{j_c}^+ \end{array}$$

En d'autres termes :

V l'espace vectoriel réel sous-jacent à V_j (par α_1) peut être identifié à V_r^c (par α_2), qui lui peut être identifié à un sous-espace vectoriel complexe de V^c ; $V_j \cong W_{j_c}^+$.

Construction de la représentation de type "BFS" de $\mathbb{H}(2k+1)$.

Soit $(\mathbb{R}^{2k}, \frac{1}{4\pi k} \sigma_0)$ l'espace symplectique définissant $\mathbb{H}(2k+1)$. $\mathbb{R}^{2k}$ jouera le rôle de V et σ_0 celui de σ ; nous utiliserons ainsi, sans le répéter, les notions et notations introduites ci-dessus.

Soit $\mathbb{H}^c(2k+1) = \left\{ e^{t u_0} e^w ; t \in \mathbb{C}, w \in (\mathbb{R}^{2k})^c \right\}$, muni du produit $e^{t u_0} e^w e^{t' u_0} e^{w'} = e^{(t+t' + \frac{1}{4\pi k} \sigma_0^c(w, w')) u_0} e^{w+w'}$; c'est un groupe de Lie, le complexifié de $\mathbb{H}(2k+1)$, dont $\mathbb{H}(2k+1)$ est un sous-groupe fermé.

L'algèbre de Lie $\mathbb{H}(2k+1)^{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{H}(2k+1)^{\mathbb{C}}$ est isomorphe à la complexification de $\mathbb{H}(2k+1)$.

1 Soit $H_{D_1} = \{ e^{t\omega_+} e^{w_-} ; t \in \mathbb{C}, \omega_+ \in W_{j_c}^+ \}$; H_{D_1} est un sous-groupe abélien, normal de $\mathbb{H}(2k+1)^{\mathbb{C}}$ tel que : $\mathbb{H}(2k+1) \cap H_{D_1} = Z$ et $(\mathbb{H}(2k+1)/Z) \times H_{D_1} \cong \mathbb{H}(2k+1)^{\mathbb{C}}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, fixé. L'application $\delta_\lambda : H_{D_1} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ envoyant $e^{t\omega_+} e^{w_-}$ sur $e^{2\pi\lambda t}$ est une représentation de dimension un de H_{D_1} , non unitaire.

Notons $(\pi_\lambda^{D_1}, \mathcal{H}_\lambda^{D_1})$ la représentation holomorphe induite à droite de $\mathbb{H}(2k+1)^{\mathbb{C}}$, par la représentation δ_λ de H_{D_1} .

Par définition, $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ est l'ensemble des fonctions holomorphes ϕ sur $\mathbb{H}(2k+1)^{\mathbb{C}}$ de carré intégrable modulo H_{D_1} et satisfaisant la relation :

$$\phi(hg) = \delta_\lambda(h) \phi(g) \quad h \in H_{D_1}, \quad g \in \mathbb{H}(2k+1)^{\mathbb{C}}$$

Notons $\mathcal{H}_\lambda^{D_1} \Big|_{\mathbb{H}(2k+1)}$ le sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ formé des fonctions ayant $\mathbb{H}(2k+1)$ pour support.

Tout élément $g \in \mathbb{H}(2k+1)$ pouvant s'identifier (α_1) à $g = e^{t\omega_+} e^{w_+ + w_-}$, avec $t \in \mathbb{R}$, $w_+ = \sum_{j=1}^k z_j a_j^+ = z\alpha^+ = (z) \in W_{j_c}^+$ et $w_- = \bar{w}_+$, on a

$$\begin{aligned} \phi(e^{t\omega_+} e^{w_+ + w_-}) &= \phi(e^{(t - \frac{1}{4\pi k} \sigma_+^c(w_-, w_+))\omega_+} e^{w_-} e^{w_+}) = \\ &= e^{2\pi\lambda(t - \frac{1}{4\pi k} \sigma_+^c(w_-, w_+))} \phi(e^{w_+}) = e^{2\pi\lambda t} e^{-\frac{\lambda}{4k} \varphi(w_+, w_+)} \phi(e^{w_+}) ; \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \phi(e^{z\alpha^+ + \bar{z}\alpha^-}) = e^{-\frac{\lambda}{4k} \bar{z}z} \phi(e^{z\alpha^+})$$

L'application R_{D_1} , définie par $(R_{D_1} \phi)(z) = e^{\frac{\lambda}{4k} \bar{z}z} \phi(e^{z\alpha^+ + \bar{z}\alpha^-})$ établit un isomorphisme entre les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda^{D_1} \Big|_{\mathbb{H}(2k+1)} \ni \phi$ et $\mathcal{H}_\lambda^{D_1} = \{ \phi : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.q.}$

i) ϕ holomorphe

$$\text{ii) } \left\{ \int_{\mathbb{C}^k} e^{-\frac{\lambda}{4k} \bar{z}z} |\phi(z)|^2 dz d\bar{z} < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire $(\phi, \phi') = \int_{\mathbb{C}^k} e^{-\frac{\lambda}{4k} \bar{z}z} \overline{\phi(z)} \phi'(z) dz d\bar{z}$, $\phi, \phi' \in \mathcal{H}_\lambda^{D_1}$.

Démonstration : L'espace $\mathbb{H}(2k+1)^c / H_{D_1}$ s'identifie à $\mathbb{H}(2k+1)/Z$, et $\mathbb{H}(2k+1)/Z$ à $\mathbb{C}^k$ (Envoyer $e^{\sum_{j=1}^k (z_j a_j^* + \bar{z}_j a_j)}$ sur

$$(x_1 + i y_1, \dots, x_k + i y_k) = (z_1, \dots, z_k) = (z).$$

La mesure d_g devient la mesure $e^{-\frac{\lambda}{2k} \sum_{j=1}^k |z_j|^2} \prod_{j=1}^k d z_j d \bar{z}_j = e^{-\frac{\lambda}{2k} \bar{z} z} d z d \bar{z}$ sur $\mathbb{C}^k$

$$(\phi, \phi')_{\mathcal{H}_\lambda^{D_1} | \mathbb{H}(2k+1)} = \int_{\mathbb{H}(2k+1)/Z} \overline{\phi(q)} \phi'(q) d g = \int_{\mathbb{C}^k} e^{-\frac{\lambda}{2k} \bar{z} z} \overline{\phi(z)} e^{-\frac{\lambda}{2k} \bar{z} z} \phi'(z) d z d \bar{z} = (\phi, \phi')_{\mathcal{H}_\lambda^{D_1}}$$

R_{D_1} est donc une isométrie, surjective ■

L'action de $\mathbb{H}(2k+1)$ sur $\mathcal{H}_\lambda^{D_1} | \mathbb{H}(2k+1)$: $(\pi_\lambda^{D_1}(g') \phi)(q) = \phi(q g')$, $g, g' \in \mathbb{H}(2k+1)$ conduit à l'action de $\mathbb{H}(2k+1)$ sur $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ par

$$\pi_\lambda^{D_1}(g) = R_{D_1} \pi_\lambda^{D_1}(g) R_{D_1}^{-1}, \quad g \in \mathbb{H}(2k+1).$$

Proposition D_1

1) $(\pi_\lambda^{D_1}, \mathcal{H}_\lambda^{D_1})$ est donnée par :

$$\begin{aligned} (\pi_\lambda^{D_1}(e^{t u_0} e^{z' a^* + \bar{z}' a^-}) \phi)(z) &= e^{2i\pi \lambda t} e^{-\frac{\lambda}{2k} \bar{z}' z'} e^{-\frac{\lambda}{2k} \bar{z} z} \phi(z + z') \\ \text{où } t \in \mathbb{R}, z' a^* + \bar{z}' a^- &= \sum_{j=1}^k (z'_j a_j^* + \bar{z}'_j a_j^-) \in V_-^c, z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k; \phi \in \mathcal{H}_\lambda^{D_1}; \\ \text{c'est une représentation continue unitaire irréductible de } \mathbb{H}(2k+1) \\ \text{sur } \mathcal{H}_\lambda^{D_1}, \text{ envoyant } e^{t u_0} \text{ sur } e^{2i\pi \lambda t} \text{Id}_{\mathcal{H}_\lambda^{D_1}}, \quad \boxed{\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}} \end{aligned}$$

2) Les opérateurs infinitésimaux de la représentation $\pi_\lambda^{D_1}$ associés aux sous-groupes à un paramètre

$$\begin{aligned} \pi_\lambda^{D_1}(e^{t u_0}) &= e^{2i\pi \lambda t E_\lambda}, \quad \pi_\lambda^{D_1}(e^{z'_j a_j^*}) = e^{\frac{i}{2} \bar{z}'_j \frac{P_\lambda^j - i Q_\lambda^j}{2}}, \quad \pi_\lambda^{D_1}(e^{\bar{z}'_j a_j^-}) = \\ &= e^{\frac{i}{2} \bar{z}'_j \frac{P_\lambda^j + i Q_\lambda^j}{2}} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}, z'_j, \bar{z}'_j \in \mathbb{C}, j=1, 2, \dots, k, \text{ nous fournissent,} \\ \text{respectivement, les opérateurs essentiellement autoadjoints} \end{aligned}$$

$$E_\lambda = \lambda \text{Id}_{\mathcal{D}}, \quad \frac{P_\lambda^j - i Q_\lambda^j}{\sqrt{2k}} = \frac{\sqrt{2k}}{z} \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \frac{P_\lambda^j + i Q_\lambda^j}{\sqrt{2k}} = \frac{i}{\sqrt{2k}} \lambda z_j \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

ayant pour domaine commun de définition $\mathcal{D}$, le sous-espace dense de $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ formé des polynômes en z_j ($j=1, 2, \dots, k$). Ils satisfont

$$\left[\frac{P_\lambda^j - i Q_\lambda^j}{\sqrt{2k}}, \frac{P_\lambda^j + i Q_\lambda^j}{\sqrt{2k}} \right] = \lambda \text{Id}_{\mathcal{D}}.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \left(\pi_{\lambda}^{D_1} (e^{i u_0} e^{z' a^+ + \bar{z}' a^-}) \phi \right) (z) = \left(R_{D_1} \pi_{\lambda}^{D_1} (e^{i u_0} e^{z' a^+ + \bar{z}' a^-}) R_{D_1}^{-1} \phi \right) (z) = \\
 & = e^{\frac{\lambda}{i k} \bar{z} z} \left(\pi_{\lambda}^{D_1} (e^{i u_0} e^{z' a^+ + \bar{z}' a^-}) R_{D_1}^{-1} \phi \right) (e^{z' a^+ + \bar{z}' a^-}) \\
 & = e^{\frac{\lambda}{i k} \bar{z} z} \left(R_{D_1}^{-1} \phi \right) (e^{z' a^+ + \bar{z}' a^-} e^{i u_0} e^{z' a^+ + \bar{z}' a^-}) \\
 & = e^{\frac{\lambda}{i k} \bar{z} z} \left(R_{D_1}^{-1} \phi \right) \left(e^{\left(t + \frac{1}{4 \pi k} \nabla_{\lambda} (z a^+ + \bar{z} a^-, z' a^+ + \bar{z}' a^-) \right) u_0} e^{(z+z') a^+ + (\bar{z} + \bar{z}') a^-} \right) \\
 & = e^{\frac{\lambda}{i k} \bar{z} z} e^{i \pi \lambda \left(t + \frac{1}{4 \pi k} \left(-\frac{1}{2i} z \bar{z}' + \frac{1}{2i} \bar{z} z' \right) \right)} \left(R_{D_1}^{-1} \phi \right) (e^{(z+z') a^+ + (\bar{z} + \bar{z}') a^-}) \\
 & = e^{\frac{\lambda}{i k} \bar{z} z} e^{i \pi \lambda t} e^{\frac{\lambda}{4 k} (-z \bar{z}' + \bar{z} z')} e^{-\frac{\lambda}{4 k} (\bar{z} + \bar{z}') (z + z')} \phi(z + z') \\
 & = e^{i \pi \lambda t} e^{-\frac{\lambda}{4 k} \bar{z}' z'} e^{-\frac{\lambda}{2 k} \bar{z} z'} \phi(z + z')
 \end{aligned}$$

Unitarité :

$$\begin{aligned}
 & \left(\pi_{\lambda}^{D_1} (e^{i u_0} e^{z' a^+ + \bar{z}' a^-}) \phi, \pi_{\lambda}^{D_1} (e^{i u_0} e^{z' a^+ + \bar{z}' a^-}) \phi' \right) = \\
 & = \int_{\mathbb{C}^k} e^{-\frac{\lambda}{i k} \bar{z} z} e^{-i \pi \lambda t} e^{-\frac{\lambda}{4 k} \bar{z}' z'} \overline{\phi(z + z')} e^{i \pi \lambda t} e^{-\frac{\lambda}{4 k} \bar{z}' z'} e^{-\frac{\lambda}{2 k} \bar{z} z'} \phi(z + z') dz d\bar{z} \\
 & = \int_{\mathbb{C}^k} e^{-\frac{\lambda}{i k} (\bar{z} z + \bar{z}' z' + \bar{z} z' + z \bar{z}')} \overline{\phi(z + z')} \phi'(z + z') dz d\bar{z} \\
 & = \int_{\mathbb{C}^k} e^{-\frac{\lambda}{i k} (\bar{z} + \bar{z}') (z + z')} \overline{\phi(z + z')} \phi'(z + z') dz d\bar{z} = (\phi, \phi')
 \end{aligned}$$

Pour l'irréductibilité, voir [Car.] et p. 46-47 de [Bab.].

2) Calculs par analogie au point 2) de la Prop. A. Pour le domaine de définition, voir [R.S.] ■

Proposition D₄

1') La représentation continue unitaire irréductible holomorphe induite à gauche de $H(2k+1)$ par la représentation δ_λ de H_{D_4} , notée $(\pi_\lambda^{D_4}, \mathcal{H}_\lambda^{D_4})$, est donnée par

$$(\pi_\lambda^{D_4}(e^{t\omega_+} e^{z'a^+ + \bar{z}'a^-}) \phi)(z) = e^{i\pi\lambda t} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2k}} \bar{z}' z'} e^{\frac{\lambda}{\sqrt{2k}} z \bar{z}} \phi(z - z')$$

$$\text{où } t \in \mathbb{R}, z'a^+ + \bar{z}'a^- = \sum_{j=1}^k (z'_j a_j^+ + \bar{z}'_j a_j^-) \in V_r^c, z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k, \phi \in \mathcal{H}_\lambda^{D_4}.$$

$$\text{Elle envoie } e^{t\omega_+} \text{ sur } e^{2i\pi\lambda t} \text{Id}_{\mathcal{H}_\lambda^{D_4}}, \quad \boxed{\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}}$$

2') Les opérateurs infinitésimaux de la représentation $\pi_\lambda^{D_4}$ associés aux sous-groupes à un paramètre définis sous 2) nous fournissent les opérateurs essentiellement autoadjoints

$$E_\lambda - \lambda \text{Id}_{\mathcal{P}}, \quad \frac{P_j^1 - iQ_j^1}{\sqrt{2k}} = -\frac{\sqrt{2k}}{i} \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \frac{P_j^1 + iQ_j^1}{\sqrt{2k}} = -\frac{i}{\sqrt{2k}} \lambda z_j \quad (j=1,2,\dots,k)$$

ayant pour domaine commun de définition $\mathcal{P}$.

Démonstration : Par analogie à la Prop. D₄ ■

2 Soit $H_{D_4} = \{e^{t\omega_+} e^{w_+}; t \in \mathbb{C}, w_+ \in W_{j_c}^+\}$; H_{D_4} est un sous-groupe abélien, normal de $H(2k+1)^c$ tel que : $H(2k+1) \cap H_{D_4} = Z$ et $(H(2k+1)/Z) * H_{D_4} \cong H(2k+1)^c$.

Soit $\boxed{\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}}$, fixé. L'application $\delta_\lambda : H_{D_4} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ envoyant $e^{t\omega_+} e^{w_+}$ sur $e^{2i\pi\lambda t}$ est une représentation de dimension un de H_{D_4} , non unitaire.

Notons $(\underline{\pi}_\lambda^{D_4}, \underline{\mathcal{H}}_\lambda^{D_4})$ la représentation antiholomorphe induite à droite de $H(2k+1)^c$, par la représentation δ_λ de H_{D_4} .

Par définition, $\underline{\mathcal{H}}_\lambda^{D_4}$ est l'ensemble des fonctions antiholomorphes $\underline{\phi}$ sur $H(2k+1)^c$ (i.e. : des fonctions holomorphes en la variable $\bar{z}$), de carré intégrable modulo H_{D_4} et satisfaisant la relation :

$$\underline{\phi}(hg) = \delta_\lambda(h) \underline{\phi}(g) \quad h \in H_{D_4}, \quad g \in H(2k+1)^c$$

Notons $\mathcal{H}_\lambda^{D_2} \Big|_{H(2k+1)}$ le sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}_\lambda^{D_2}$ formé des fonctions ayant $H(2k+1)$ pour support.

Tout élément $q \in H(2k+1)$ pouvant s'écrire $q = e^{t u_+} e^{\omega_+ + \omega_-}$, avec $t \in \mathbb{R}$,

$$\omega_+ = \sum_{j=1}^k z_j a_j^+ = z a^+ = (z) \in W_{j_c}^+ \quad \text{et} \quad \omega_- = \overline{\omega_+} \quad , \quad \text{on a}$$

$$\begin{aligned} \underline{\phi}(e^{t u_+} e^{\omega_+ + \omega_-}) &= \underline{\phi}\left(e^{\left(t - \frac{i}{4\pi k} \sigma_+^c(\omega_+, \omega_-)\right) u_+} e^{\omega_+} e^{\omega_-}\right) = e^{i t \pi \lambda \left(t - \frac{i}{4\pi k} \sigma_+^c(\omega_+, \omega_-)\right)} \underline{\phi}(e^{\omega_-}) \\ &= e^{2 i \pi \lambda t} e^{\frac{\lambda}{4k} \overline{\varphi(\omega_+, \omega_+)}} \underline{\phi}(e^{\omega_-}) = e^{2 i \pi \lambda t} e^{-\frac{|\lambda|}{4k} \varphi(\omega_+, \omega_+)} \underline{\phi}(e^{\omega_-}) \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \underline{\phi}(e^{z a^+ + \bar{z} a^-}) = e^{-\frac{|\lambda|}{4k} z \bar{z}} \underline{\phi}(e^{\bar{z} a^-}) .$$

L'application R_{D_2} définie par $(R_{D_2} \underline{\phi})(z) = e^{\frac{|\lambda|}{4k} z \bar{z}} \underline{\phi}(e^{z a^+ + \bar{z} a^-})$ établit un isomorphisme entre les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda^{D_2} \Big|_{H(2k+1)} \ni \underline{\phi}$ et $\mathcal{H}_\lambda^{D_2} = \left\{ \phi : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.q.} \right.$

i) ϕ antiholomorphe

$$\text{ii) } \int_{\mathbb{C}^k} e^{-\frac{|\lambda|}{2k} z \bar{z}} |\phi(\bar{z})|^2 dz d\bar{z} < +\infty \quad \Bigg\}$$

muni du produit scalaire

$$(\phi, \phi') = \int_{\mathbb{C}^k} e^{-\frac{|\lambda|}{2k} z \bar{z}} \overline{\phi(\bar{z})} \phi'(\bar{z}) dz d\bar{z} \quad \phi, \phi' \in \mathcal{H}_\lambda^{D_2}$$

L'action de $H(2k+1)$ sur $\mathcal{H}_\lambda^{D_2} \Big|_{H(2k+1)} : (\pi_\lambda^{D_2}(g') \underline{\phi})(g) = \underline{\phi}(g g') \quad ; \quad g, g' \in H(2k+1)$

conduit à l'action de $H(2k+1)$ sur $\mathcal{H}_\lambda^{D_2}$ par

$$\pi_\lambda^{D_2}(g) = R_{D_2} \pi_\lambda^{D_2}(g) R_{D_2}^{-1} \quad , \quad g \in H(2k+1) .$$

Proposition D₁

1) $(\pi_{\lambda}^{D_1}, \mathcal{H}_{\lambda}^{D_1})$ est donnée par :

$$(\pi_{\lambda}^{D_1}(e^{tu_0} e^{z'a^+ + \bar{z}'a^-}) \phi)(\bar{z}) = e^{i\pi\lambda t} e^{-\frac{i\lambda}{4k} \bar{z}' z'} e^{-\frac{i\lambda}{2k} \bar{z} z'} \phi(\bar{z} + \bar{z}')$$

où $t \in \mathbb{R}$, $z'a^+ + \bar{z}'a^- = \sum_{j=1}^k (z'_j a_j^+ + \bar{z}'_j a_j^-) \in V_r^c$, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k) \in \mathbb{C}^k$, $\phi \in \mathcal{H}_{\lambda}^{D_1}$.

C'est une représentation continue unitaire irréductible de $H(2k+1)$ sur $\mathcal{H}_{\lambda}^{D_1}$ envoyant e^{tu_0} sur $e^{i\pi\lambda t} \text{Id}_{\mathcal{H}_{\lambda}^{D_1}}$, $\lambda \in \mathbb{R}^- - \{0\}$

2) Les opérateurs infinitésimaux de la représentation $\pi_{\lambda}^{D_1}$ associés aux sous-groupes à un paramètre

$$\pi_{\lambda}^{D_1}(e^{tu_0}) = e^{i\pi t E_{\lambda}}, \quad \pi_{\lambda}^{D_1}(e^{z'_j a_j^+}) = e^{\frac{i}{k} z'_j \frac{P_j^i - iQ_j^i}{2}},$$

$$\pi_{\lambda}^{D_1}(e^{\bar{z}'_j a_j^-}) = e^{\frac{i}{k} \bar{z}'_j \frac{P_j^i + iQ_j^i}{2}}$$

où $t \in \mathbb{R}$, $z'_j, \bar{z}'_j \in \mathbb{C}$, $j=1,2,\dots,k$, nous fournissent, respectivement, les opérateurs essentiellement autoadjoints

$$E_{\lambda} = \lambda \text{Id}_{\mathcal{P}}, \quad \frac{P_j^i - iQ_j^i}{\sqrt{2k}} = \frac{i|\lambda|}{\sqrt{2k}} \bar{z}_j, \quad \frac{P_j^i + iQ_j^i}{\sqrt{2k}} = \frac{\sqrt{2k}}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \quad (j=1,2,\dots,k)$$

ayant pour domaine commun de définition $\mathcal{P}$, le sous-espace dense de $\mathcal{H}_{\lambda}^{D_1}$ formé des polynômes en $\bar{z}_j$ ($j=1,2,\dots,k$). Ils satisfont

$$\left[\frac{P_j^i - iQ_j^i}{\sqrt{2k}}, \frac{P_j^i + iQ_j^i}{\sqrt{2k}} \right] = \lambda \text{Id}_{\mathcal{P}}.$$

Démonstration : Par analogie à la proposition D

Proposition D₂'

1') La représentation continue unitaire irréductible antiholomorphe induite à gauche de $H(\lambda^{k+1})$ par la représentation δ_λ de H_{D_1} , notée $(\pi_\lambda^{D_2}, \mathcal{H}_\lambda^{D_2})$, est donnée par :

$$\left(\pi_\lambda^{D_2} \left(e^{t\omega} e^{z'\alpha^+ + \bar{z}'\alpha^-} \right) \phi \right) (\bar{z}) = e^{iz\pi\lambda t} e^{-\frac{i\lambda}{4t} z' \bar{z}'} e^{\frac{i\lambda}{4} z' \bar{z}} \phi(\bar{z} - \bar{z}')$$

où $t \in \mathbb{R}$, $z'\alpha^+ + \bar{z}'\alpha^- = \sum_{j=1}^k (\alpha_j' + \bar{z}_j' \alpha_j') \in V_r^c$, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k) \in \mathbb{C}^k$, $\phi \in \mathcal{H}_\lambda^{D_2}$.

Elle envoie $e^{t\omega}$ sur $e^{iz\pi\lambda t} \text{Id}_{\mathcal{H}_\lambda^{D_2}}$, $\boxed{\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}}$

2') Les opérateurs infinitésimaux de la représentation $\pi_\lambda^{D_2}$ associés aux sous-groupes à un paramètre définis sous 2) nous fournissent les opérateurs essentiellement autoadjoints

$$E_\lambda = \lambda \text{Id}_{\mathcal{P}}, \quad \frac{P_j^i - iQ_j^i}{\sqrt{ik}} = -\frac{i\lambda}{\sqrt{ik}} \bar{z}_j, \quad \frac{P_j^i + iQ_j^i}{\sqrt{ik}} = -\frac{\sqrt{ik}}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \left(\begin{smallmatrix} j=1,2,\dots,k \end{smallmatrix} \right)$$

ayant pour domaine commun de définition $\mathcal{P}$.

Démonstration : Par analogie à celle de la proposition D₁ ■

Remarque 10 : Chaque espace $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, $\mathcal{H}_\lambda^{D_2}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^- - \{0\}$, peut être comparé à un espace de Hilbert des états d'un oscillateur harmonique quantique à k dimensions qui, lui, est identique à l'espace de Fock $\mathcal{F}_+(\mathbb{C}^k)$ associé à l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^k$.

Tout en détaillant la remarque 10, nous allons construire explicitement une base orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ (resp. $\mathcal{H}_\lambda^{D_2}$).

a) Rappel (voir [M.R.] Ch. 6).

L'espace de Fock, cas symétrique, associé à l'espace de Hilbert à une particule $\mathcal{H}$ est donné par

$$\mathcal{F}_+(\mathcal{H}) = \sum_{l=0}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_+^{\otimes l} = \left\{ \varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l, \varphi_l \in \mathcal{H}_+^{\otimes l} \text{ pour chaque } l \text{ t.q. } \sum_{l=0}^{\infty} (\varphi_l, \varphi_l) < +\infty, \text{ avec } (\cdot, \cdot) \text{ le produit scalaire dans } \mathcal{H}_+^{\otimes l} \right\}$$

Il est muni du produit scalaire $(\varphi, \varphi') = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\varphi_{\ell}, \varphi'_{\ell})$, où $\varphi_{\ell}, \varphi'_{\ell} \in \mathcal{H}_+^{\otimes \ell}$.

L'opérateur N défini sur $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ par $N\varphi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \varphi_{\ell}$ est l'opérateur nombre de particules.

Les opérateurs de création et d'annihilation d'une particule dans l'état $\varphi \in \mathcal{H}$ sont définis par :

$$A^*(\varphi)|\varphi_1, \dots, \varphi_{\ell}\rangle = \sqrt{\ell+1} |\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{\ell}\rangle \quad \ell=0, 1, \dots$$

où $|\varphi_1, \dots, \varphi_{\ell}\rangle \in \mathcal{H}_+^{\otimes \ell}$ et $|\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{\ell}\rangle \in \mathcal{H}_+^{\otimes (\ell+1)}$ dans la notation de Dirac .
 $A(\varphi) = (A^*(\varphi))^*$, $\forall \varphi \in \mathcal{H}$, où $*$ est l'opération "prise de l'adjoint".

Ces opérateurs satisfont les relations de commutation :

$$[A^*(\varphi), A^*(\varphi')] = -[A(\varphi), A(\varphi')] = 0 \quad , \quad [A(\varphi), A^*(\varphi')] = (\varphi, \varphi') \text{Id}_D$$

sur D leur domaine commun invariant de définition, dense dans $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$.

Dans le cas où l'on s'est donné une base orthonormée $\{u_j\}_{j \in I}$ de $\mathcal{H}$, on note simplement $A_j^* = A^*(u_j)$ et $A_j = A(u_j)$, $\forall j \in I$.

- b) Lorsque $\mathcal{H} = \mathbb{C}$, $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$ est exactement l'espace de Hilbert des états d'un oscillateur harmonique quantique à une dimension.

C'est-à-dire : Puisque la dimension de $\mathbb{C}_+^{\otimes \ell}$ est égale à 1 quel que soit $\ell \in \mathbb{N}$, appelant u_{ℓ} un élément de base normé de cet espace, on a que l'ensemble $\{u_{\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$. Dans cette base, un élément φ de $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$ s'écrit $\varphi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_{\ell} u_{\ell}$ avec $\alpha_{\ell} \in \mathbb{C}$ quel que soit $\ell \in \mathbb{N}$ et le produit scalaire de φ et $\varphi' = \sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_{\ell} u_{\ell} \in \mathcal{F}_+(\mathbb{C})$ est $(\varphi, \varphi') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \overline{\alpha_{\ell}} \beta_{\ell}$.

Soient $A^* = A^*(u_1)$ et $A = A(u_1)$; ces opérateurs agissent sur les éléments de base $|u_{\ell}\rangle$ de $\mathbb{C}_+^{\otimes \ell}$ et $|u_{\ell+1}\rangle$ de $\mathbb{C}_+^{\otimes (\ell+1)}$ respectivement, de la manière suivante : $A^*|u_{\ell}\rangle = \sqrt{\ell+1}|u_{\ell+1}\rangle$, $A|u_{\ell+1}\rangle = \sqrt{\ell+1}|u_{\ell}\rangle$. Ils satisfont les relations de commutation $[A, A^*] = \text{Id}_D$, $[A, A] = -[A^*, A^*] = 0$, sur D .

- c) Faisant le produit tensoriel de k facteurs $\mathcal{F}_+(\mathbb{C})$, on obtient

$$\mathcal{F}_+(\mathbb{C}) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_+(\mathbb{C}) \cong \mathcal{F}_+(\mathbb{C}^k)$$

l'espace des états d'un oscillateur harmonique à k dimensions.

d) D'autre part, considérons la série de puissances

$$P(z) = \sum_{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k} \alpha_{m_1 \dots m_k} z_1^{m_1} \dots z_k^{m_k}$$

(respectivement en $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)$) où $\alpha_{m_1 \dots m_k} \in \mathbb{C}$, $\forall (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k$.

Elle définit une fonction de $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ (respectivement $\mathcal{H}_\lambda^{D_2}$) si

$$\int_{\mathbb{C}^k} e^{-\frac{|\lambda|}{2k} z \bar{z}} |P(z)|^2 dz d\bar{z} < +\infty$$

$$\text{c'est-à-dire si } \sum_{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k} (2\pi)^k \frac{m_1! \dots m_k!}{\left(\frac{|\lambda|}{2k}\right)^{\frac{k}{2}(m_1+1)}} |\alpha_{m_1 \dots m_k}|^2 < +\infty$$

On en déduit que l'ensemble des fonctions

$$u_{m_1 \dots m_k}(z_1, \dots, z_k) = \frac{\left(\frac{|\lambda|}{2k}\right)^{\frac{k}{2}(m_1+1)}}{(2\pi)^{k/2} \sqrt{m_1! \dots m_k!}} z_1^{m_1} \dots z_k^{m_k}, \quad (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k$$

(respectivement $u_{m_1 \dots m_k}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)$) sont mutuellement orthogonales, de norme un et on peut montrer qu'elles forment un système total dans $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ (respectivement $\mathcal{H}_\lambda^{D_2}$) ([Bar.3], Ch. VII de [B.C.D.]).

Dans cette base, le produit scalaire de $\phi = \sum_{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k} \alpha_{m_1 \dots m_k} u_{m_1 \dots m_k}$ et

$$\phi' = \sum_{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k} \beta_{m_1 \dots m_k} u_{m_1 \dots m_k} \in \mathcal{H}_\lambda^{D_1} \quad (\text{respectivement } \mathcal{H}_\lambda^{D_2})$$

s'exprime par

$$(\phi, \phi') = \sum_{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k} \overline{\alpha_{m_1 \dots m_k}} \beta_{m_1 \dots m_k}$$

Les opérateurs :

$$A_{\lambda j}^+ = \frac{1}{i\sqrt{\lambda}} \frac{P_j^i + iQ_j^i}{\sqrt{2k}} \quad \text{et} \quad A_{\lambda j} = (A_{\lambda j}^+)^* = \frac{1}{i\sqrt{\lambda}} \frac{P_j^i - iQ_j^i}{\sqrt{2k}}$$

$$(\text{respectivement } A_{\lambda j}^+ = \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \frac{P_j^i - iQ_j^i}{\sqrt{2k}} \quad \text{et} \quad A_{\lambda j} = (A_{\lambda j}^+)^* = \frac{i}{i\sqrt{\lambda}} \frac{P_j^i + iQ_j^i}{\sqrt{2k}}),$$

agissent de la manière suivante sur les éléments de base de $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ (respectivement $\mathcal{H}_\lambda^{D_2}$)

$$A_{\lambda j}^+ u_{m_1 \dots m_k} = \sqrt{m_j+1} u_{m_1 \dots (m_j+1) \dots m_k} \quad \text{et}$$

$$A_{\lambda j} u_{m_1+1, \dots, m_k+1} = \sqrt{m_j+1} u_{m_1, \dots, m_j, \dots, m_k+1}$$

$$A_{\lambda j}^+ A_{\lambda j} u_{m_1 \dots m_k} = m_j u_{m_1 \dots m_k} \quad \text{est l'opérateur nombre.}$$

Utilisant la décomposition de $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ (respectivement $\mathcal{H}_\lambda^{D_2}$) en somme directe de ses sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}_\ell^{(1)}$ (respectivement $\mathcal{P}_\ell^{(2)}$) des polynômes homogènes de degré ℓ (i.e. $\mathcal{P}_\ell^{(1)}$ (respectivement $\mathcal{P}_\ell^{(2)}$) est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ (respectivement $\mathcal{H}_\lambda^{D_2}$) engendré par les monômes $\bar{z}_1^{m_1} \dots \bar{z}_k^{m_k}$ (respectivement $\bar{z}_1^{m_1} \dots \bar{z}_k^{m_k}$) tels que $\sum_{j=1}^k m_j = \ell$; $(d_m \mathcal{P}_\ell^{(1)}) = (d_m \mathcal{P}_\ell^{(2)}) = \binom{k-1+\ell}{k-1}$, on a $\mathcal{H}_\lambda^{D_1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \oplus \mathcal{P}_\ell^{(1)}$ (respectivement $\mathcal{H}_\lambda^{D_2} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \oplus \mathcal{P}_\ell^{(2)}$).

Il s'ensuit un isomorphisme entre $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ (respectivement $\mathcal{H}_\lambda^{D_2}$) et $\mathcal{F}_+(\mathbb{C}^k) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\mathbb{C}^k)_+^{\otimes \ell}$ ($d_m(\mathbb{C}^k)_+^{\otimes \ell} = \binom{k-1+\ell}{k-1}$).

On remarque aussi que $\mathcal{H}_\lambda^{D_r}$ est isomorphe au produit tensoriel de k facteurs notés ${}^A \mathcal{H}_\lambda^{D_r}$, où ${}^A \mathcal{H}_\lambda^{D_r}$ est égal à l'espace $\mathcal{H}_\lambda^{D_r}$ pour $k=1$; $r=1, 2$.

§II.3. CONSTRUCTION DES OPERATEURS D'ENTRELAACEMENT ENTRE
LES REPRESENTATIONS DE $H(2k+1)$ APPARTENANT A
 $K_\lambda, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, ET EXHIBEES AU §II.2.

La correspondance entre les représentations continues unitaires irréductibles équivalentes appartenant à K_λ , induites à partir de représentations à une dimension de divers sous-groupes de $H(2k+1)$, se fait en explicitant à l'aide de la méthode de Mackey [Ma.3] des opérateurs d'entrelacement.

- Définition 8 : Soient π et π' deux représentations continues d'un groupe (l.c.s.) G dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ respectivement. Un OPERATEUR d'ENTRELAACEMENT de π et π' est une transformation linéaire continue $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$, qui vérifie
- $$T\pi(g) = \pi'(g)T, \forall g \in G.$$
- L'ensemble des opérateurs d'entrelacement de π et π' est un espace vectoriel complexe, noté $R(\pi, \pi')$.

Méthode de Mackey ([Ma.3], p. 365) :

Soient

G un groupe unimodulaire;

H_1 et H_2 deux sous-groupes fermés unimodulaires de G ;

χ_1 et χ_2 deux caractères de H_1 et H_2 respectivement;

$(\pi_{\chi_1}, \mathcal{H}_{\chi_1}), (\pi_{\chi_2}, \mathcal{H}_{\chi_2})$ les représentations induites à droite par les caractères χ_1, χ_2 de H_1, H_2 respectivement, supposées irréductibles;

$$T_A : \mathcal{H}_{\chi_1} \longrightarrow \mathcal{H}_{\chi_2} \text{ défini par } T_A(f)(g) = \int_{G/H_1} A(gg'^{-1}) f(g') dg' \quad (2.1)$$

où :

- i) A est une fonction à valeurs complexes sur G vérifiant

$$A(\xi g \eta) = \chi_1(\xi) A(g) \chi_2(\eta) \quad \forall \xi \in H_1, \eta \in H_2 \quad (2.2)$$

- ii) $f \in D(T_A) \subset \mathcal{H}_{\chi_1}$.

Si $D(T_A)$ est dense dans $\mathcal{H}_{\chi_1}$ et stable par G , et si T_A est un opérateur continu et fermé, alors T_A est un opérateur d'entrelacement de π_{χ_1} et π_{χ_2} .

On observe que chaque solution de (2.2) est uniquement déterminée par sa valeur en un point d'une double classe $H_1 g H_1, g \in G$; d'autre part, étant donné une solution A de (2.2) et $g_0 \in G$, on remarque que A reste une solution de (2.2) si on la réduit à zéro à l'extérieur de la double classe $H_1 g_0 H_1$, et qu'on la laisse inchangée dans $H_1 g_0 H_1$, i.e. :

$$A_{g_0}(g) = \begin{cases} A(g) & \text{si } g \in H_1 g_0 H_1 \\ 0 & \text{si } g \notin H_1 g_0 H_1 \end{cases} \quad \text{est aussi une solution de (2.2).}$$

- Définition 9 : $T_{A_g}, g \in G$, s'appelle OPERATEUR d'ENTRELACEMENT DOUBLE CLASSE.

Remarque 11 : Pour $g, g' \in H_1 g H_1$, T_{A_g} et $T_{A_{g'}}$, ne diffèrent que d'une constante multiplicative.

1. Lien entre une induite à droite et une induite à gauche à partir de la même représentation d'un même sous-groupe

Proposition 3

Soient

G un groupe unimodulaire;

H un sous-groupe fermé de G ;

π_χ (respectivement π'_χ) la représentation de G induite à droite (respectivement à gauche) par le caractère χ de H .

Alors : π_χ et π'_χ sont unitairement équivalentes, i.e. : $\boxed{\pi}'_\chi \boxed{\pi}^{-1} = \pi_\chi$;
où $\boxed{\pi}$ est l'involution donnée par la formule $(\boxed{\pi} f)(g) = f(g^{-1})$,
 $f \in \mathcal{H}_\chi, g \in G$.

Démonstration : Voir Chap. 16 de [B.R.] ■

2. Lien entre $(\pi_{\lambda_0}^A, L^1(\mathbb{R}^k))$ et $(\pi_{\lambda_0}^B, L^1(\mathbb{R}^k))$, les représentations de Schrödinger dans l'espace de configuration et dans l'espace des impulsions

Proposition 4

L'opérateur d'entrelacement de $\pi_{\lambda_0}^A$ et $\pi_{\lambda_0}^B$ est donné par la transformée de Fourier

$$\Psi(y) = \left(\frac{|\lambda|}{2\pi k} \right)^{k/2} \int_{\mathbb{R}^k} dx e^{-i \frac{\lambda}{k} xy} \phi(x)$$

avec $\phi \in L^1(\mathbb{R}^k)$ (espace de configuration) et $\Psi \in L^1(\mathbb{R}^k)$ (espace des impulsions).

Démonstration :

- 1) Soient (1) $\left\{ \begin{matrix} H_A \\ \chi_{\lambda_0}^A \end{matrix} \right\}$, (2) $\left\{ \begin{matrix} H_B \\ \chi_{\lambda_0}^B \end{matrix} \right\}$, $g = e^{tu_0} e^{xe+yf} \in H(2k+1)$, $e^{x'e} \in H(2k+1)/H_A$.

Par la méthode de Mackey

$$T_A(\phi)(e^{tu_0} e^{xe+yf}) = \int_{\mathbb{R}^k} dx' A(e^{tu_0} e^{xe+yf} e^{-x'e}) \phi(e^{x'e}) \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_{\lambda_0}^A$$

- 2) $H_B : H_A = \{ H_B g H_A ; g \in H(2k+1) \} = \{ e \}$ une seule double classe.

$$A(e^{tu_0} e^{xe+yf} e^{-x'e}) = A(e^{(t - \frac{1}{4\pi k} \sigma_0(xe, yf)) u_0} e^{xe} e^{yf} e^{-x'e}) =$$

$$A(e^{(t - \frac{1}{4\pi k} \sigma_0(xe, yf) + \frac{1}{2\pi k} \sigma_0(yf, -x'e)) u_0} e^{(x-x')e} e^{yf}) =$$

$$\chi_{\lambda_0}^B(e^{(t - \frac{1}{4\pi k} xy + \frac{1}{2\pi k} x'y) u_0} e^{(x-x')e}) A(e) \chi_{\lambda_0}^A(e^{yf})$$

Choix : $A(e) = c$ constante réelle $\neq 0$.

3) D'où

$$T_A(\phi)(e^{iu} e^{ie+u^2}) = e^{i\tau\lambda t} e^{-i\frac{\lambda}{2k}xy} \subset \int_{\mathbb{R}} dx' e^{i\frac{\lambda}{k}x'y} \phi(e^{x'})$$

4) On passe sur $L^2(\mathbb{R}^k)$.

$$\phi \xrightarrow{R_A} \phi \xrightarrow{T_A} T_A(\phi) \xrightarrow{R_B} \tilde{\Psi} \quad \text{nous donne l'opérateur d'entrelacement entre } (\pi_{\lambda_0}^A, L^2(\mathbb{R}^k)) \text{ et } (\pi_{\lambda_0}^B, L^2(\mathbb{R}^k)).$$

Finalement on a

$$\Psi(y) = (\boxplus \tilde{\Psi})(y) = \subset \int_{\mathbb{R}^k} dx e^{-i\frac{\lambda}{k}xy} \phi(x) \quad \text{où } \boxplus \text{ est l'involution définie}$$

dans la prop. 3 et où $\subset$ est à déterminer de manière à ce que cette transformation soit une isométrie ■

3. Lien entre $(\pi_{\lambda\tau}^A, L^2(\mathbb{R}^k))$ et $(\pi_{\lambda\tau'}^A, L^2(\mathbb{R}^k))$, les représentations de Schrödinger dans l'espace de configuration avec τ et τ' , respectivement.

Proposition 5

L'opérateur d'entrelacement de $\pi_{\lambda\tau}^A$ et $\pi_{\lambda\tau'}^A$, est donné par

$$(\mathcal{U}_{\tau'-\tau} \phi)(x) = \phi(x + \tau' - \tau)$$

avec : $\phi \in L^2(\mathbb{R}^k)$ (espace de la représentation $\pi_{\lambda\tau}^A$)

$$\mathcal{U}_{\tau'-\tau} \phi \in L^2(\mathbb{R}^k) \quad (\text{espace de la représentation } \pi_{\lambda\tau'}^A)$$

Démonstration : On vérifie que

$$\mathcal{U}_{\tau'-\tau} \pi_{\lambda\tau}^A(g) = \pi_{\lambda\tau'}^A(g) \mathcal{U}_{\tau'-\tau}, \quad \forall g \in H(2k+1) \quad \blacksquare$$

4. Lien entre $(\pi_{\lambda}^{D_1}, \mathcal{H}_{\lambda}^{D_1})$ et $(\pi_{\lambda_0}^A, L^2(\mathbb{R}^k))$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, entre $(\pi_{\lambda}^{D_1}, \mathcal{H}_{\lambda}^{D_1})$ et $(\pi_{\lambda_0}^A, L^2(\mathbb{R}^k))$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^- - \{0\}$, les représentations de type B.F.S. et de Schrödinger dans l'espace de configuration

Proposition 6

- 1 Pour $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, l'opérateur d'entrelacement de $\pi_{\lambda}^{D_1}$ et $\pi_{\lambda_0}^A$ est donné par

$$\phi(x) = \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\pi k}} \right)^k e^{-\frac{\lambda}{2k} x^2} \int_{\mathbb{R}^k} dy e^{-\frac{\lambda}{4k} (y+ix)^2} \Psi(x+iy)$$

où $\Psi \in \mathcal{H}_{\lambda}^{D_1}$, $\phi \in L^2(\mathbb{R}^k)$, $z = x+iy = (x_1+iy_1, \dots, x_k+iy_k) \in \mathbb{C}^k$ et $x^2 = \sum_{j=1}^k x_j^2$, $(y+ix)^2 = \sum_{j=1}^k (y_j+ix_j)^2$, avec notre convention.

L'opérateur inverse est

$$\Psi(z) = \left(\frac{\lambda}{2\pi k} \sqrt{\frac{\pi k}{\lambda}} \right)^k \int_{\mathbb{R}^k} dt e^{-\frac{\lambda}{4k} (2t-z)^2} e^{\frac{\lambda}{2k} t^2} \phi(t)$$

avec $t^2 = \sum_{j=1}^k t_j^2$ et $(2t-z)^2 = \sum_{j=1}^k (2t_j - z_j)^2$.

- 2 Pour $\lambda \in \mathbb{R}^- - \{0\}$, l'opérateur d'entrelacement de $\pi_{\lambda}^{D_1}$ et $\pi_{\lambda_0}^A$ est donné par

$$\phi(x) = \left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\pi k}} \right)^k e^{-\frac{|\lambda|}{2k} x^2} \int_{\mathbb{R}^k} dy e^{-\frac{|\lambda|}{4k} (y-ix)^2} \Psi(x-iy)$$

où $\Psi \in \mathcal{H}_{\lambda}^{D_1}$, $\phi \in L^2(\mathbb{R}^k)$, $\bar{z} = x-iy = (x_1-iy_1, \dots, x_k-iy_k) \in \mathbb{C}^k$.

L'opérateur inverse est

$$\Psi(\bar{z}) = \left(\frac{|\lambda|}{2\pi k} \sqrt{\frac{\pi k}{|\lambda|}} \right)^k \int_{\mathbb{R}^k} dt e^{-\frac{|\lambda|}{4k} (2t-\bar{z})^2} e^{\frac{|\lambda|}{2k} t^2} \phi(t)$$

Démonstration :

1) Soient (1) $\begin{cases} Z = H_{D_1} \cap H(2k+1) \\ \delta_\lambda | Z \end{cases}$, (2) $\begin{cases} H_A \\ \chi_{\lambda_0}^A \end{cases}$, $g = e^{t u_0} e^{x e + y f} \in H(2k+1)$,

$e^{x' e + y' f} \in H(2k+1)/Z$. Par la méthode de Mackey

$$T_A(\Psi)(e^{t u_0} e^{x e + y f}) = \int_{\mathbb{R}^k} dx' \int_{\mathbb{R}^k} dy' A(e^{t u_0} e^{x e + y f} e^{-x' e - y' f}) \Psi(e^{x' e + y' f})$$

$$\forall \Psi \in \mathcal{H}_\lambda^{D_1} \Big|_{H(2k+1)}.$$

2) $H_A : Z = \{ H_A g Z ; g \in H(2k+1) \} = \{ e^{x e} ; x \in \mathbb{R}^k \}$.

L'ensemble des doubles classes est isomorphe à $\mathbb{R}^k$. On a

$$A(e^{t u_0} e^{x e + y f} e^{-x' e - y' f}) =$$

$$A(e^{(t - \frac{1}{4\pi k} \sigma_0(y f, x e) - \frac{1}{4\pi k} \sigma_0(-y f, -x' e)) u_0} e^{y f} e^{x e} e^{-y' f} e^{-x' e}) =$$

$$A(e^{(t + \frac{1}{4\pi k} x y + \frac{1}{4\pi k} x' y' + \frac{1}{2\pi k} \sigma_0(x e, -y' f)) u_0} e^{(y - y') f} e^{(x - x') e}) =$$

$$e^{2i\pi \lambda t} e^{i \frac{\lambda}{2k} x y} e^{i \frac{\lambda}{2k} x' y'} e^{-i \frac{\lambda}{k} x y'} A(e^{(x - x') e}).$$

Choix : $A(e^{(x - x') e}) = c \delta(x - x')$ (donc "on choisit A non nul sur la double classe correspondant à $x = x'$ " ; nous verrons plus loin, dans une remarque, la forme de l'opérateur d'entrelacement double classe correspondant à un autre A).

3) D'où

$$T_A(\Psi)(e^{t u_0} e^{x e + y f}) = c e^{2i\pi \lambda t} e^{i \frac{\lambda}{2k} x y} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-i \frac{\lambda}{2k} x y'} \Psi(e^{x e + y' f}) dy'$$

4) Passons sur $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ et $L^2(\mathbb{R}^k)$.

$$\Psi \xrightarrow{R_{D_1}} \Psi \xrightarrow{T_A} T_A(f) \xrightarrow{R_A} \phi \text{ nous fournit l'opérateur}$$

d'entrelacement suivant entre $(\pi_\lambda^{D_1}, \mathcal{H}_\lambda^{D_1})$ et $(\pi_{\lambda_0}^A, L^2(\mathbb{R}^k))$

$$\phi(x) = c e^{-\frac{\lambda}{2k} x^2} \int_{\mathbb{R}^k} dy e^{-\frac{\lambda}{4k} (y + i x)^2} \Psi(x + i y)$$

5) Déterminons la constante c afin d'avoir une isométrie entre $\mathcal{H}_\lambda^{\mathbb{D}_1}$ et $L^2(\mathbb{R}^k)$. Soit

$$\Psi_{m_1 \dots m_k}(z_1, \dots, z_k) = \prod_{j=1}^k \frac{\left(\frac{\lambda}{2k}\right)^{\frac{m_j+1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{m_j!}} z_j^{m_j}, \quad (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k$$

une base orthonormée de $\mathcal{H}_\lambda^{\mathbb{D}_1}$ (voir §II.2. Remarque 10, point d)).

Transformons $\Psi_{m_1 \dots m_k}$ par l'opérateur d'entrelacement ci-dessus (point 4))

$$\phi_{m_1 \dots m_k}(x_1, \dots, x_k) = c e^{-\frac{\lambda}{2k} \sum_{j=1}^k x_j^2} \prod_{j=1}^k \left(\int_{\mathbb{R}^k} dy_j e^{-\frac{\lambda}{4k} (y_j + i x_j)^2} \frac{\left(\frac{\lambda}{2k}\right)^{\frac{m_j+1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{m_j!}} (x_j + i y_j)^{m_j} \right)$$

Soit

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(t-u)^2} H_n(t) dt = \sqrt{\pi} u^n 2^n$$

(p. 837 No 6 de [G.R.]), où H_n est le polynôme d'Hermite de degré n .

Utilisant cette formule pour $u = \sqrt{\frac{\lambda}{4k}}(x_j + i y_j)$, $n = m_j$ et $t = \sqrt{\frac{\lambda}{k}} t'$, on a

$$(x_j + i y_j)^{m_j} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\frac{k}{\lambda}} \right)^{m_j-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{4k} (2t' - (x_j + i y_j))^2} H_{m_j} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}} t' \right) dt'$$

L'introduisant dans l'expression de $\phi_{m_1 \dots m_k}$, on trouve

$$\begin{aligned} \phi_{m_1 \dots m_k}(x_1, \dots, x_k) &= c \prod_{j=1}^k \left(\frac{\left(\frac{\lambda}{2k}\right)^{\frac{m_j+1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{m_j!}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\frac{k}{\lambda}} \right)^{m_j-1} e^{-\frac{\lambda}{2k} x_j^2} \right. \\ &\quad \cdot \left. \int_{\mathbb{R}} dy_j e^{-\frac{\lambda}{4k} (y_j + i x_j)^2} \int_{\mathbb{R}} dt e^{-\frac{\lambda}{4k} (2t - (x_j + i y_j))^2} H_{m_j} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}} t \right) \right) = \end{aligned}$$

$$c \prod_{j=1}^k \left(\frac{\lambda}{\pi k} \frac{1}{(\sqrt{2})^{m_j+1}} \frac{1}{\sqrt{m_j!}} e^{-\frac{\lambda}{2k} x_j^2} \int_{\mathbb{R}} dt e^{-\frac{\lambda}{k} t^2 + \frac{\lambda}{k} t x_j} H_{m_j} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}} t \right) \int_{\mathbb{R}} dy_j e^{\frac{i\lambda}{k} y_j (t - x_j)} \right)$$

Or
$$\int_{\mathbb{R}} dy_j e^{i \frac{\lambda}{k} y_j (t - x_j)} = 2\pi \delta\left(\frac{\lambda}{k}(t - x_j)\right) = 2\pi \frac{k}{\lambda} \delta(t - x_j) \quad , \text{ d'où}$$

$$\phi_{m_1, \dots, m_k}(x_1, \dots, x_k) = C \prod_{j=1}^k \left(\frac{1}{\sqrt{2^{m_j} m_j!}} e^{-\frac{\lambda}{2k} x_j^2} H_{m_j}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}} x_j\right) \right)$$

Utilisant le fait que l'ensemble des fonctions d'Hermite :

$$\tilde{V}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad (x \in \mathbb{R})$$

forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, on a que l'ensemble des

$$V_n(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi k}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{\lambda}{2k} x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}} x\right)$$

forme aussi une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. On en déduit que l'ensemble des

$$\phi_{m_1, \dots, m_k}(x_1, \dots, x_k) = \prod_{j=1}^k \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\pi k}} \frac{1}{\sqrt{2^{m_j} m_j!}} e^{-\frac{\lambda}{2k} x_j^2} H_{m_j}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}} x_j\right) \right) \quad , \quad (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k$$

(i.e. $C = \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\pi k}}\right)^k$) , est la base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^k)$ correspondant

à la base orthonormée $\Psi_{m_1, \dots, m_k}, (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k$, de $\mathcal{H}_{\lambda}^{D_1}$.

6) Nous avons maintenant presque établi l'inverse de l'opérateur d'entrelacement de $\pi_{\lambda}^{D_1}$ et $\pi_{\lambda_0}^A$. Considérons (voir 5))

$$\prod_{j=1}^k (x_j + i y_j)^{m_j} = \prod_{j=1}^k \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\frac{k}{\lambda}} \right)^{m_j-1} \int_{\mathbb{R}} dt_j e^{-\frac{\lambda}{4k} (2t_j - (x_j + i y_j))^2} H_{m_j}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}} t_j\right) \right)$$

et introduisons :

$$i) \quad \prod_{j=1}^k H_{m_j}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}} t_j\right) = \prod_{j=1}^k \left(\frac{\sqrt{2^{m_j} m_j!}}{\sqrt{\frac{\lambda}{\pi k}}} e^{\frac{\lambda}{2k} t_j^2} \right) \phi_{m_1, \dots, m_k}(t_1, \dots, t_k)$$

$$ii) \quad \prod_{j=1}^k (x_j + i y_j)^{m_j} = \prod_{j=1}^k \left(\frac{\sqrt{2^{m_j} m_j!}}{\left(\frac{\lambda}{2k}\right)^{m_j+1/2}} \right) \Psi_{m_1, \dots, m_k}(z_1, \dots, z_k)$$

$$iii) \quad z = (z_1, \dots, z_k) = (x_1 + i y_1, \dots, x_k + i y_k) \quad ; \quad t = (t_1, \dots, t_k) \quad .$$

On en déduit que

$$\Psi_{m_1, \dots, m_k}(z) = \left(\frac{\lambda}{2\pi k} \sqrt{\frac{\pi k}{\lambda}} \right)^k \int_{\mathbb{R}^k} dt e^{-\frac{\lambda}{4k}(2t-z)^2} e^{\frac{\lambda}{4k}t^2} \phi_{m_1, \dots, m_k}(t)$$

Puisque l'ensemble des $\Psi_{m_1, \dots, m_k}, (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k$ est total dans $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$, on peut prolonger cet opérateur d'entrelacement de $\pi_{\lambda_0}^A$ et $\pi_\lambda^{D_1}$ en une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^k)$ sur $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$.

2

Est immédiat par analogie au point

1



Remarque 12 : Le choix d'un autre A au point 2) de la démonstration de la proposition 6, $A(e^{(x-x')^2}) = c\delta(x-x'-a)$, $a \in \mathbb{R}^k$, nous conduit à l'opérateur d'entrelacement double classe de $\pi_\lambda^{D_1}$ et $\pi_{\lambda_0}^A$

$$\phi(x) = \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\pi k}} \right)^k e^{-\frac{\lambda}{4k}(x^2+a^2)} \int_{\mathbb{R}^k} dy e^{-\frac{\lambda}{4k}(y+i(x-a))^2} \Psi_{m_1, \dots, m_k}(y)$$

envoyant la base orthonormée $\{\Psi_{m_1, \dots, m_k}\}_{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k}$ de $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ sur la base $\{\phi_{m_1, \dots, m_k}\}_{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k}$ de $L^2(\mathbb{R}^k)$ quel que soit $a \in \mathbb{R}^k$. Nous avons choisi $a=0$ par commodité.

5. Lien entre $(\pi_{\lambda_0}^A, L^2(\mathbb{R}^k))$ et $(\pi_{mF}^C, \mathcal{H}_{mF}^C)$, $\lambda = m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, les représentations de Schrödinger dans l'espace de configuration et de type "réseau"

Proposition 7

L'opérateur d'entrelacement de $\pi_{\lambda_0}^A$ et π_{mF}^C , $\lambda = m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, est donné par

$$\psi(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{i\pi k})^k} e^{\frac{i m}{2k} y(x - \alpha)} \sum_{s \in \mathbb{Z}^k} e^{-\frac{i m}{k} y s} e^{i\pi F(s)} \phi(x - s - \alpha)$$

où : $\alpha \in \mathbb{R}$ nul pour m pair et nul si $F = F'$ pour m impair;

$\alpha = (\frac{1}{2}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$ pour m impair avec $F = F''$;

$\phi \in L^2(\mathbb{R}^k)$, $\psi \in \mathcal{H}_{mF}^C$ et $vw = \sum_{j=1}^k v_j w_j$ par convention.

L'opérateur inverse est

$$\phi(x) = \frac{1}{(\sqrt{i\pi k})^k} \int_{[0, i\pi k]^k} dy e^{-\frac{i m}{2k} y(x - \alpha)} \psi(x + \alpha, y)$$

Démonstration :

- 1) Soient (1) $\left\{ \begin{matrix} H_A \\ \chi_{\lambda_0}^A \end{matrix} \right\}$, (2) $\left\{ \begin{matrix} H_C \\ \psi_{mF}^C \end{matrix} \right\}$, $g = e^{i u_0} e^{i x + y \dagger} \in H(2k+1)$, $e^{x' \dagger} \in H(2k+1)/H_A$.

Par la méthode de Mackey

$$T_A(\underline{\phi})(e^{i u_0} e^{i x + y \dagger}) = \int_{\mathbb{R}^k} dx' A(e^{i u_0} e^{i x + y \dagger} e^{-x' \dagger}) \underline{\phi}(e^{x' \dagger}) \quad , \quad \forall \underline{\phi} \in \mathcal{H}_{\lambda_0}^A$$

- 2) $H_C \cdot H_A = \{H_C g H_A; g \in H(2k+1)\} = \{e^{x \dagger}; x \in [0, 1]^k\}$. L'ensemble des doubles classes est isomorphe à $[0, 1]^k$.

$$A(e^{ku_0} e^{xe+yf} e^{-x'e}) = A(e^{ku_0} e^{-\frac{1}{i\hbar k} \sigma_0(xe, yf)} u_0 e^{ue} e^{yf} e^{-x'e}) =$$

$$A(e^{(k - \frac{1}{i\hbar k} xy + \frac{1}{i\hbar k} \sigma_0(yf, -x'e)) u_0} e^{(x-x')e} e^{yf}) =$$

$$e^{2i\pi m t} e^{-\frac{i}{\hbar k} xy} e^{\frac{i}{\hbar k} x'y} A(e^{(x-x')e})$$

Posons $x - x' = s + u$; $s \in \mathbb{Z}^k$, $u \in [0, 1]^k$.

$$D'où $A(e^{ku_0} e^{xe+yf} e^{-x'e}) = e^{2i\pi m t} e^{-\frac{i}{\hbar k} xy} e^{\frac{i}{\hbar k} x'y} e^{i\pi F(s)} A(e^{ue})$.$$

3) Cela donne

$$T_A(\underline{\phi})(e^{ku_0} e^{xe+yf}) =$$

$$e^{2i\pi m t} e^{-\frac{i}{\hbar k} xy} \int_{\mathbb{R}} dx'_1 \int_{\mathbb{R}} dx'_2 e^{i\frac{\pi}{\hbar} \sum_{j=1}^k x'_j y_j} A(e^{\sum_{j=1}^k (x'_j - x'_j) e_j}) \underline{\phi}(e^{\sum_{j=1}^k x'_j e_j}) =$$

$$e^{2i\pi m t} e^{-\frac{i}{\hbar k} xy} \lim_{N=(N_1, \dots, N_k) \rightarrow \infty} \int_{-N_1}^{N_1} dx'_1 \int_{-N_k}^{N_k} dx'_k e^{i\frac{\pi}{\hbar} \sum_{j=1}^k x'_j y_j} A(e^{\sum_{j=1}^k (x'_j - x'_j) e_j}) \underline{\phi}(e^{\sum_{j=1}^k x'_j e_j})$$

Posons $x'_j = x_j - s_j - u_j$; $s_j \in \mathbb{Z}$, $u_j \in [0, 1]$; notons

$$s = (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{Z}^k, u = (u_1, \dots, u_k) \in [0, 1]^k$$

$$T_A(\underline{\phi})(e^{ku_0} e^{xe+yf}) = e^{2i\pi m t} e^{-\frac{i}{\hbar k} xy} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{s=-N}^{N-1} e^{-\frac{i}{\hbar k} sy} e^{i\pi F(s)} \int_{[0,1]^k} du e^{-\frac{i}{\hbar k} uy} A(e^{ue}) \underline{\phi}(e^{(x-s-u)e})$$

$$= e^{2i\pi m t} e^{-\frac{i}{\hbar k} xy} \sum_{s \in \mathbb{Z}^k} e^{-\frac{i}{\hbar k} sy} e^{i\pi F(s)} \int_{[0,1]^k} du e^{-\frac{i}{\hbar k} uy} A(e^{ue}) \underline{\phi}(e^{(x-s-u)e})$$

Passons sur les espaces de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^k)$ et $\mathcal{H}_{m, \hbar}^C$, respectivement;

$\phi: \mathcal{R}_A'' \rightarrow \underline{\phi}: T_A \rightarrow T_A(\underline{\phi}) \xrightarrow{R_C} \varphi$ nous fournit l'opérateur suivant

$$\varphi(x, y) = e^{\frac{i}{\hbar k} xy} \sum_{s \in \mathbb{Z}^k} e^{-\frac{i}{\hbar k} sy} e^{i\pi F(s)} \int_{[0,1]^k} du e^{-\frac{i}{\hbar k} uy} A(e^{ue}) \phi(x-s-u)$$

entrelaçant $\pi_{\lambda_0}^A$ et π_{λ}^D .

Nous pouvons maintenant choisir $A(e^{ue})$ de manière à ce que la fonction φ appartienne à $\mathcal{H}_{m, \hbar}^C$.

φ doit être quasi périodique sur L , i.e. : satisfaire

$$\varphi(x+r, y+2\pi k_s f) = e^{i\pi m \left(-\frac{1}{4\pi k} \sigma_0(r+2\pi k_s f, x+y f) \right)} e^{i\pi F(r+2\pi k_s f)} \varphi(x, y), \forall r, s \in \mathbb{Z}^k,$$

d'autre part, on a

$$F(r+2\pi k_s f) = F(r) + F(2\pi k_s f) + \frac{m}{2\pi k} \sigma_0(r, 2\pi k_s f)$$

(c.f. démonstration Lemme 1).

On en déduit que, si $(e^{-2i\pi m u s} - e^{i\pi F(2\pi k_s f)}) A(e^{u s}) = 0$, alors φ est quasi périodique sur le réseau.

i) Cas de m pair : $F = 0$ et on peut choisir $A(e^{u s}) = c \delta(u)$.

ii) Cas de m impair :

$$F = F' : F'(2\pi k_s f) = 0 \quad \text{et on peut choisir} \quad A(e^{u s}) = c \delta(u) .$$

$$F = F'' : F''(2\pi k_s f) = s_1^k \quad \text{et on peut choisir} \quad A(e^{u s}) = c \delta(u_1 - \frac{1}{2}) \prod_{j=2}^k \delta(u_j) .$$

Notons $A(e^{u s}) = c \delta(u - a)$ avec

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R}^k & \text{nul pour } m \text{ pair et nul si } F = F' \text{ pour } m \text{ impair;} \\ a = (\frac{1}{2}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k & \text{pour } m \text{ impair avec } F = F'' . \end{cases}$$

Finalement

$$\varphi(x, y) = c e^{i \frac{m}{2k} (x-a) y} \sum_{s \in \mathbb{Z}^k} e^{-i \frac{m}{2k} s y} e^{i\pi F(s)} \phi(x-a-s) \quad (2.3)$$

4) Détermination de la constante c de façon à avoir une isométrie entre $L^2(\mathbb{R}^k)$ et $\mathcal{H}_{mF}^c$. De l'égalité

$$\|\varphi\|^2 = \int_{[0,1]^k \times [0,2\pi k]^k} dx dy |\varphi(x, y)|^2 = \|\phi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^k} dx |\phi(x)|^2$$

$$\text{on tire} \quad c = \frac{1}{(\sqrt{2\pi k})^k}$$

5) Il est possible d'inverser l'expression (2.3); l'opérateur d'entrelacement entre π_{mF}^c et $\pi_{\lambda_0}^A$ s'exprime par

$$\phi(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi k})^k} \int_{[0,2\pi k]^k} dy e^{-i \frac{m}{2k} y (x-a)} \varphi(x+a, y)$$

Remarque 13 : La base orthonormée de $\mathcal{H}_{m_F}^C$ correspondant à la base orthonormée

$$\phi_{m_1 \dots m_k}(x_1, \dots, x_k) = \prod_{j=1}^k \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\pi k}} \frac{1}{(2\pi m_j)^{1/2}} e^{-\frac{\lambda}{2k} x_j^2} \right) \phi_{m_1 \dots m_k} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}} x_j \right), (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k, \lambda = m,$$

de $L^2(\mathbb{R}^k)$ est donnée par

$$\psi_{m_1 \dots m_k}(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi k})^k} e^{i \frac{\pi}{2k} j(x - 1a)} \sum_{s \in \mathbb{Z}^k} e^{-i \frac{\pi}{k} y s} e^{i \pi F(s)} \phi_{m_1 \dots m_k}(x - s - a)$$

où $\begin{cases} a \in \mathbb{R}^k & \text{nul pour } m \text{ pair et nul si } F = F' \text{ pour } m \text{ impair;} \\ a = (\frac{1}{2}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k & \text{pour } m \text{ impair avec } F = F''. \end{cases}$

6. Lien entre $(\pi_{\lambda}^{D_1}, \mathcal{H}_{\lambda}^{D_1})$ et $(\pi_{\lambda}^C, \mathcal{H}_{\lambda}^C)$ pour $\lambda = m \in \mathcal{A}^+ \setminus \{0\}$, entre $(\pi_{\lambda}^{D_1}, \mathcal{H}_{\lambda}^{D_1})$ et $(\pi_{\lambda}^C, \mathcal{H}_{\lambda}^C)$ pour $\lambda = m \in \mathcal{A}^- \setminus \{0\}$, les représentations de type B.F.S. et de type "réseau"

Proposition 8

1 L'opérateur d'entrelacement de $\pi_{\lambda}^{D_1}$ et π_{λ}^C pour $\lambda = m \in \mathcal{A}^+ \setminus \{0\}$ est donné par

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \sqrt{\frac{m}{\pi k}} \right)^k e^{\frac{i}{2k} y(x-2a)} \sum_{s \in \mathbb{Z}^k} e^{-\frac{i}{k} y s} e^{i\pi F(s)} e^{-\frac{m}{2k}(x-s-a)^2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^k} dt e^{-\frac{m}{2k}(t+i(x-s-a))^2} \psi(x-s-a+it) \right\}$$

où $\begin{cases} a \in \mathbb{R}^k & \text{pour } m \text{ pair et nul si } F = F' \text{ pour } m \text{ impair;} \\ a = (\frac{1}{2}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k & \text{pour } m \text{ impair avec } F = F'; \end{cases}$

$$\psi \in \mathcal{H}_{\lambda}^{D_1}, \varphi \in \mathcal{H}_{\lambda}^C.$$

L'opérateur inverse est

$$\Psi(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \sqrt{\frac{m}{\pi k}} \right)^k \left\{ \int_{\mathbb{R}^k} dt e^{-\frac{m}{2k}(2t-z)^2} e^{\frac{m}{2k} t^2} \int_{[0, 2\pi k] \mathbb{Z}^k} dv e^{-\frac{i}{2k} v(t-a)} \varphi(t+a, v) \right\}$$

où $z = (z_1, \dots, z_k) = (x_1 + iy_1, \dots, x_k + iy_k) \in \mathbb{C}^k$.

2 L'opérateur d'entrelacement de $\pi_{\lambda}^{D_1}$ et π_{λ}^C pour $\lambda = m \in \mathcal{A}^- \setminus \{0\}$ est donné par

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \sqrt{\frac{|m|}{\pi k}} \right)^k e^{\frac{i}{2k} y(x-2a)} \sum_{s \in \mathbb{Z}^k} e^{-\frac{i}{k} y s} e^{i\pi F(s)} e^{-\frac{|m|}{2k}(x-s-a)^2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^k} dt e^{-\frac{|m|}{2k}(t-i(x-s-a))^2} \psi(x-s-a-it) \right\}$$

où $\psi \in \mathcal{H}_{\lambda}^{D_1}, \varphi \in \mathcal{H}_{\lambda}^C$.

L'opérateur inverse est

$$\Psi(\bar{z}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \sqrt{\frac{|m|}{\pi k}} \right)^k \left\{ \int_{\mathbb{R}^k} dt e^{-\frac{|m|}{2k}(2t-\bar{z})^2} e^{\frac{|m|}{2k} t^2} \int_{[0, 2\pi k] \mathbb{Z}^k} dv e^{-\frac{i}{2k} v(t-a)} \varphi(t+a, v) \right\}$$

où $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k) = (x_1 - iy_1, \dots, x_k - iy_k) \in \mathbb{C}^k$.

Démonstration : Par composition des opérateurs des propositions 6 et 7 ■

Remarque 14 : On peut utiliser la méthode de Mackey pour construire l'opérateur d'entrelacement de $\pi_{\lambda}^{D_1}$ et π_{mF}^C . Pour obtenir le même résultat que dans la proposition 8, on doit choisir une certaine "fonction" A (2.2) qui ne fournit pas un opérateur d'entrelacement double classe. En d'autres termes, la composition de deux opérateurs d'entrelacement double classe n'est pas nécessairement un opérateur d'entrelacement double classe.

§II.4. A PROPOS DE CERTAINS OPERATEURS AUTOADJOINTS

$Q^j, P^j, j=1,2,\dots,k$, SATISFAISANT LES RELATIONS
DE COMMUTATION CANONIQUES

Problème : Soient $Q^j, P^j, j=1,2,\dots,k$, des opérateurs autoadjoints satisfaisant les relations de commutation canoniques $[Q^j, P^j] = ik Id_D$ sur un sous-espace dense D de $\mathcal{H}$, un certain espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie. On peut se demander quand et comment ces opérateurs sont reliés aux opérateurs infinitésimaux d'une représentation continue unitaire irréductible d'un groupe de Heisenberg.

Nous savons qu'une représentation continue unitaire irréductible π_λ du groupe de Heisenberg $H_p(2k+1)$ sur $\mathcal{H}$, $\lambda \in [\sigma = 9\sigma_0], \theta \neq 0$, envoyant $e^{t\sigma_0}$ sur $e^{i\pi\lambda t} Id_{\mathcal{H}}$, donne lieu aux relations de commutation canoniques (voir §II.1.).

$$[Q_\lambda^j, P_\lambda^j] = \frac{4\pi\lambda\theta}{abk} ik Id \quad \text{sur} \quad D, \quad j=1,2,\dots,k$$

où $Q_\lambda^j, P_\lambda^j, j=1,2,\dots,k$ sont des opérateurs autoadjoints, générateurs infinitésimaux des sous-groupes à un paramètre $\pi_\lambda(e^{t_j\sigma_j}) = e^{it_jQ_\lambda^j}$,

$$\pi_\lambda(e^{t_j\tau_j}) = e^{it_jP_\lambda^j}, \quad t_j, \tau_j \in \mathbb{R}, \quad j=1,2,\dots,k; \quad a, b \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Donc, étant donnés des opérateurs autoadjoints $\{Q^j, P^j\}_{j=1,2,\dots,k}$ satisfaisant $[Q^j, P^j] = ik Id_D, j=1,2,\dots,k$, il faut essayer de trouver les quatre constantes suivantes

- (i) Θ (i.e. : fixer la classe d'équivalence des multiplicateurs de $\mathbb{R}^{1k}$ équivalents à $\sigma = \theta\sigma_0$. Ce choix ne détermine un groupe de Heisenberg qu'à isomorphisme près !);
- (ii) λ (i.e. : fixer la classe K_λ de représentations continues unitaires irréductibles envoyant $e^{t\sigma_0}$ sur $e^{i\pi\lambda t} Id_{\mathcal{H}}$);
- (iii) a et b (apparaissant dans la définition des générateurs infinitésimaux);

liées par la relation $\frac{4\pi\lambda\theta}{abk} = 1$, ainsi que déterminer de quel type connu de représentant de K_λ peut provenir l'ensemble $\{Q^j, P^j\}_{j=1,2,\dots,k}$, ainsi que le groupe de Heisenberg représenté.

Avant de donner quelques exemples (proposition 9) nous introduisons des notations et construisons explicitement la représentation de type réseau du groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_p(2k+1)$, ainsi que la représentation kq de Zak ($2k'$ -dimensionnelle) (le lien entre ces deux représentations est explicité dans la proposition 9(8)).

- (a) Nous noterons toujours Q^j, P^j , munis des indices appropriés, les générateurs infinitésimaux des sous-groupes à un paramètre $\pi(e^{y_j^i} P^j) = e^{ia y_j^i} Q^j$ et $\pi(e^{x_j^i} P^j) = e^{ib x_j^i} P^j$ respectivement, d'un groupe de Heisenberg représenté par π ; $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ fixes; $x_j^i, y_j^i \in \mathbb{R}$ les paramètres, $j=1, 2, \dots, k$.
- (b) Soit $\sigma = \theta \sigma_0$, $\theta \in \mathbb{R} - \{0, \frac{1}{\sqrt{mk}}\}$. On note $(\pi_{\lambda \tau}^{\theta A}, L^1(\mathbb{R}^k)), (\pi_{\lambda \kappa}^{\theta B}, L^1(\mathbb{R}^k))$ les représentations de type "position" et "moment", respectivement, du groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_\sigma(2k+1)$ déduites de celles de $\mathbb{H}(2k+1)$ par l'isomorphisme liant $\mathbb{H}_\sigma(2k+1)$ et $\mathbb{H}(2k+1)$ (voir §II.1. la démonstration (iii) de la proposition 1 avec $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}^k(2k-1)$).
- (c) Construction explicite de la représentation de type réseau du groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_p(2k+1)$ quel que soit $p \in [\sigma, \theta \sigma_0]$, $\theta \neq 0$ (à l'aide de la représentation de type réseau $(\pi_{mF}^{\theta C}, \mathcal{H}_{mF}^{\theta C})$ de $\mathbb{H}(2k+1)$ (proposition C)).
- (i) Soient $L_\theta = \{\ell = re + \frac{1}{\sqrt{mk}} p; r, s \in \mathbb{Z}^k\}$ un réseau principal de $\mathbb{R}^{2k}$, $H_C^\theta = \{e^{t v} \cdot e^t; t \in \mathbb{R}, \ell \in L_\theta\}$ et Ψ_{mF} un caractère de H_C^θ défini sur H_C^θ comme au §II.2. C. On remarque que lorsque $\theta = \frac{1}{\sqrt{mk}}$, $L_\theta = L$ et $H_C^\theta = H_C$. La représentation $(\pi_{mF}^{\theta C}, \mathcal{H}_{mF}^{\theta C})$ de $\mathbb{H}_{\theta \sigma_0}(2k+1)$ induite à droite par le caractère Ψ_{mF} de H_C^θ est donnée par
- $$(\pi_{mF}^{\theta C}(e^{t v} \cdot e^{v'}) \phi)(v) = e^{i \sigma m t} e^{i \sigma m \theta \sigma_0(v, v')} \phi(v + v') \text{ où } t \in \mathbb{R}, v, v' \in \mathbb{R}^{2k} \text{ et } \phi \in \mathcal{H}_{mF}^{\theta C} \text{ est quasi périodique sur le réseau } L_\theta :$$
- $$\phi(v + \ell) = e^{-i \sigma m \theta \sigma_0(\ell, v)} e^{i \sigma m F(\ell)} \phi(v), \quad v \in \mathbb{R}^{2k}, \ell \in L_\theta$$
- (Utiliser la proposition C et la proposition 1 (iii) du §II.1. avec $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}^k(2k-1)$).
- (ii) Soit ν une fonction polynomiale de $\mathbb{R}^{2k}$ dans $\mathbb{R}$ et β défini par $\beta = \sigma - \delta \nu$.

- a) Par la proposition 1 (ii) §II.1., l'isomorphisme

$$\mathcal{L} : \mathbb{H}_{\theta \sigma_0}(2k+1) \longrightarrow \mathbb{H}_\beta(2k+1)$$

envoie $e^{t\nu} e^v$ sur $e^{(t+\nu(v))u} e^v$.

b) Posons $T(\ell) = F(\ell) - 2m\nu(\ell)$, $\ell \in L_\theta$, et $\mathcal{H}_{mT}^{\beta C} = \left\{ \Psi: \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{C} \text{ t.q.} \right.$

(1) Ψ est borélienne sur $\mathbb{R}^{2k}$;

(2) $\int_C |\Psi(v)|^2 dv < +\infty$ pour chaque cellule élémentaire C de L_θ ;

(3) Ψ est quasi périodique sur L_θ

$$\Psi(v+\ell) = e^{-2i\pi m\nu(\ell, v)} e^{i\pi T(\ell)} \Psi(v), \quad v \in \mathbb{R}^{2k}, \ell \in L_\theta. \quad \left. \vphantom{\int_C} \right\}$$

c) L'application $U_\nu: \mathcal{H}_{mF}^{\theta C} \longrightarrow \mathcal{H}_{mT}^{\beta C}$ définie par

$$(U_\nu \phi)(v) = e^{-2i\pi m\nu(v)} \phi(v)$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

d) Du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_p(2k+1) & \xrightarrow{\pi_{mT}^{\beta C}} & \mathcal{U}(\mathcal{H}_{mT}^{\beta C}) \\ \mathcal{U}^{-1} \downarrow & & \downarrow U_\nu^{-1} \cdots U_\nu \\ H_{\theta\sigma_p}(2k+1) & \xrightarrow{\pi_{mF}^{\theta C}} & \mathcal{U}(\mathcal{H}_{mF}^{\theta C}) \end{array}$$

$$\text{i.e. } (U_\nu^{-1} \pi_{mT}^{\beta C}(g) U_\nu \phi)(v) = ((\pi_{mF}^{\theta C} \circ \mathcal{U}^{-1})(g) \phi)(v)$$

$$\text{où } g \in H_p(2k+1) \text{ et } \phi \in \mathcal{H}_{mF}^{\theta C},$$

$$\text{on tire } (\pi_{mT}^{\beta C}(e^{t\nu} e^{v'}) \Psi)(v) = e^{2i\pi m t} e^{2i\pi m\nu(v, v')} \Psi(v+v')$$

$$\text{où } t \in \mathbb{R}, v, v' \in \mathbb{R}^{2k}, \Psi \in \mathcal{H}_{mT}^{\beta C}.$$

Lemme 5

Les opérateurs infinitésimaux de la représentation de type réseau $(\pi_{mT}^{PC}, \mathcal{H}_{mT}^{PC})$ de $|\mathbb{H}(2k+1)|$, $\beta = \sigma - \delta\nu$ associés aux sous-groupes à un paramètre

$$\pi_{mT}^{PC}(e^{y_j^0} f_j) = e^{ib y_j^0} Q_{mT}^{P_j}, \quad \pi_{mT}^{PC}(e^{x_j^0} e_j) = e^{ia x_j^0} P_{mT}^{P_j},$$

nous fournissent les opérateurs essentiellement autoadjoints

$$\begin{cases} P_{mT}^{P_j} = -\frac{2\pi m \theta}{b} y_j + \frac{2\pi m \theta}{b} \frac{\partial}{\partial x_j} \underline{\nu}(xe + y_j^0) + \frac{1}{ib} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ Q_{mT}^{P_j} = \frac{2\pi m \theta}{a} x_j + \frac{2\pi m \theta}{a} \frac{\partial}{\partial y_j} \underline{\nu}(xe + y_j^0) + \frac{1}{ia} \frac{\partial}{\partial y_j} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, k$$

ayant comme domaine commun de définition $\mathcal{H}_{mT}^{PC}$,

$$\text{où } xe + y_j^0 = \sum_{j=1}^k (x_j^0 e_j + y_j^0 f_j) \quad \text{et } \nu = \theta \underline{\nu}.$$

Démonstration :

De $(\pi_{mT}^{PC}(e^{t\nu_0} e^{v'})\Psi)(v) = e^{i2\pi m t} e^{i2\pi m \beta(v, v')}\Psi(v+v')$ on tire

$$\begin{cases} P_{mT}^{P_j} = \frac{2\pi m}{b} \frac{\partial}{\partial x_j} \beta(v, x_j^0 e_j) \Big|_{x_j^0=0} + \frac{1}{ib} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ Q_{mT}^{P_j} = \frac{2\pi m}{a} \frac{\partial}{\partial y_j} \beta(v, y_j^0 f_j) \Big|_{y_j^0=0} + \frac{1}{ia} \frac{\partial}{\partial y_j} \end{cases}$$

$$\beta = \sigma - \delta\nu \iff \sigma(v, v') = \beta(v, v') + \nu(v) + \nu(v') - \nu(v+v') \quad , \quad v, v' \in \mathbb{R}^{2k}.$$

Posons $\nu = \theta \underline{\nu}$. On a alors

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \beta(v, x_j^0 e_j) \Big|_{x_j^0=0} = -\theta y_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \theta \underline{\nu}(x_j^0 e_j) \Big|_{x_j^0=0} + \frac{\partial}{\partial x_j} \theta \underline{\nu}(xe + y_j^0)$$

On remarque que $\frac{\partial}{\partial x_j} \underline{\nu}(x_j^0 e_j) \Big|_{x_j^0=0}$ est toujours nul, sauf si $\underline{\nu}$ contient un terme linéaire en x_j . Mais ce dernier cas ne nous intéresse pas car, si $\underline{\nu}$ contient un terme linéaire, $\underline{\nu}(v) + \underline{\nu}(v') - \underline{\nu}(v+v')$ ne le contient plus.

Idem pour $Q_{mT}^{P_j}$ ■

Les opérateurs $\{Q_{nT}^{Pj}, P_{nT}^{Pj}\}_{j=1,2,\dots,k}$ satisfont les relations de

$$\text{commutation canoniques } [Q_{nT}^{Pj}, P_{nT}^{Pj}] = \frac{4\pi m \theta}{abk} ik Id_{\mathcal{H}_{T,P}^{a,c}}.$$

(d) Construction heuristique de la représentation kq de Zak
($2k'$ -dimensionnelle) [Za.]

(i) Soient $a_1, \dots, a_{k'}, b_1, \dots, b_{k'}$ les vecteurs de base du réseau cristallin direct et réciproque, respectivement, du solide $2k'$ -dimensionnel considéré, tels que $a_j \cdot b_l = \frac{1}{2\theta} \delta_{jl}$, $j, l = 1, 2, \dots, k'$ et $\theta = \frac{1}{4\pi k n}$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Nous choisissons $a_j = e_j$, $b_j = \frac{1}{2\theta} f_j$, $j = 1, 2, \dots, k'$.

(ii) Notons $R_r = \sum_{j=1}^{k'} r_j a_j$, $K_s = \sum_{j=1}^{k'} s_j b_j$, $r_j, s_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \dots, k'$.

Soient $Q_{\lambda_0}^{\theta j} = x_j$, $P_{\lambda_0}^{\theta j} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \dots, k'$, les opérateurs

infinitésimaux de la représentation de Schrödinger dans l'espace de configuration $(\pi_{\lambda_0}^A, L^2(\mathbb{R}^{k'}))$ du groupe $\mathbb{H}_{\theta, \sigma}((2k'+1))$, λ fixé tel que $\lambda\theta = \frac{-1}{4\pi k}$ et $b = -a = \frac{1}{k}$.

Les opérateurs de translation R_r dans l'espace direct, et K_s dans l'espace réciproque, sont donnés par

$$T(R_r) = e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{k'} r_j P_{\lambda_0}^{\theta j}}, T(K_s) = e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{k'} (\frac{1}{2\theta} s_j) Q_{\lambda_0}^{\theta j}} \quad \text{respectivement.}$$

(iii) L'ensemble particulier $\left\{ T(a_j) = e^{\frac{i}{\hbar} P_{\lambda_0}^{\theta j}}, T(b_j) = e^{\frac{i}{2\theta \hbar} Q_{\lambda_0}^{\theta j}} \right\}_{j=1,2,\dots,k'}$

forme un ensemble complet d'opérateurs qui commutent. Les fonctions généralisées suivantes sont, par abus de langage, "fonctions propres" communes de $T(a_j), T(b_j)$, $j = 1, 2, \dots, k'$:

$$\psi_{k,q}^q(x) = \frac{1}{(|2\theta|)^{k/2}} e^{-i\varphi(k,q)} \sum_{r \in \mathbb{Z}^{k'}} e^{\frac{i}{\hbar} k \cdot r} \delta(x - q - r)$$

où a) $q = (q_1, \dots, q_{k'}) \in \mathbb{R}^{k'}$, $k = (k_1, \dots, k_{k'}) \in \mathbb{R}^{k'}$

$$b) k \cdot r = \sum_{j=1}^{k'} k_j r_j$$

$$c) \delta(x - q - r) = \prod_{j=1}^{k'} \delta(x_j - q_j - r_j)$$

où d) $T(a_j) \Psi_{k,q}^q(x) = e^{\frac{i}{2} k_j} \Psi_{k,q}^q(x)$, $k_j \in [0, \frac{1}{2\theta}]$ et périodiquement

$T(b_j) \Psi_{k,q}^q(x) = e^{\frac{i}{2\theta} q_j} \Psi_{k,q}^q(x)$, $q_j \in [0, 1]$ et périodiquement

e) η est une fonction polynomiale de $\mathbb{R}^{1*}$ dans $\mathbb{R}$.

(iv) $\left\{ \Psi_{k,q}^q \right\}_{k \in [0, \frac{1}{2\theta}]^{k'}, q \in [0, 1]^{q'}}$, η fixé, est un ensemble de fonctions généralisées, que l'on nomme représentation k_q^q . Elles sont orthonormées

$$\int_{\mathbb{R}^{k'}} \overline{\Psi_{k,q}^q(x)} \Psi_{k',q'}^q(x) dx = \sum_{s \in \mathbb{Z}^{k'}} \delta(k - k' - \frac{1}{2\theta} s) \sum_{r \in \mathbb{Z}^{q'}} \delta(q - q' - r)$$

et satisfont la "relation de fermeture"

$$\int_{[0, \frac{1}{2\theta}]^{k'} \times [0, 1]^{q'}} \overline{\Psi_{k,q}^q(x)} \Psi_{k',q'}^q(x') dk dq = \delta(x - x')$$

(v) Soit $\phi \in L^2(\mathbb{R}^{k'})$; écrite dans la représentation k_q^q , on la note

$$C^q(k, q) = \int_{\mathbb{R}^{k'}} dx \overline{\Psi_{k,q}^q(x)} \phi(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2\theta}\right)^{k'/2}} e^{i\eta(k, q)} \sum_{r \in \mathbb{Z}^{k'}} e^{\frac{i}{2} k_r} \phi(q - r).$$

$C^q(k, q)$ est quasi périodique sur le réseau cristallin L_θ :

$$C^q\left(k + \frac{1}{2\theta} s, q + r\right) = e^{\frac{i}{2} k_r} e^{i\left(\eta\left(k + \frac{1}{2\theta} s, q + r\right) - \eta(k, q)\right)} C^q(k, q)$$

où $k, q \in \mathbb{R}^{k'}$; $r, s \in \mathbb{Z}^{k'}$ (i.e. : $R, K_s \in L_\theta$).

(vi) Le calcul des éléments de matrice $\langle k_q | P_{\lambda_0}^{0j} | k'q' \rangle$ et $\langle k_q | Q_{\lambda_0}^{0j} | k'q' \rangle$ (notation de Dirac) nous donne l'expression des opérateurs $P_{\lambda_0}^{0j}$ et $Q_{\lambda_0}^{0j}$, $j = 1, 2, \dots, k'$ dans la représentation k_q^q :

$$\langle k_q | P_{\lambda_0}^{0j} | k'q' \rangle = \left(-\hbar \frac{\partial}{\partial q_j} \eta(k, q) + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \delta(q - q') \delta(k - k')$$

$$\langle k_q | Q_{\lambda_0}^{0j} | k'q' \rangle = \left(q_j + \hbar \frac{\partial}{\partial k_j} \eta(k, q) + i\hbar \frac{\partial}{\partial k_j} \right) \delta(q - q') \delta(k - k')$$

On pose

$$\begin{cases} \hbar P^j = -\hbar \frac{\partial}{\partial q_j} \eta(k, q) + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j} \\ -\hbar Q^j = q_j + \hbar \frac{\partial}{\partial k_j} \eta(k, q) + i\hbar \frac{\partial}{\partial k_j} \end{cases}$$

Proposition 9

Soit $\mu: \mathbb{R}^{2k} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application polynomiale telle que $\mu(0) = 0$.

Soit

$$\begin{cases} P^j = \alpha y_j - \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \mu(xe + yf) + \omega \frac{\partial}{\partial x_j} \\ Q^j = \gamma x_j + \gamma \frac{\partial}{\partial y_j} \mu(xe + yf) + \delta \frac{\partial}{\partial y_j} \end{cases}$$

satisfaisant $[Q^j, P^i] = ik \text{Id}_D$, $j = 1, 2, \dots, k$; $\alpha, \omega, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$

(ce qui est équivalent à la condition : les constantes $\alpha, \omega, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ sont reliées par

$$\alpha\delta - \gamma\omega - (\alpha\delta + \gamma\omega) \frac{\partial^2 \mu(xe + yf)}{\partial x_j \partial y_j} = ik \quad).$$

D est dense dans un espace de Hilbert complexe séparable $\mathcal{H}$ de dimension infinie.

Dans huit cas, on peut dire quand et comment ces opérateurs $\{Q^j, P^j; j = 1, 2, \dots, k\}$ sont reliés aux opérateurs infinitésimaux d'une représentation continue unitaire irréductible d'un groupe de Heisenberg.

Ce qui vient d'être énoncé sous la proposition 9 doit être vu comme précédant chacune des huit propositions qui suivent.

Proposition 9(1)

Les opérateurs

$$\begin{cases} P_j = \alpha y_j - \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \mu(x+yf) + \omega \frac{\partial}{\partial x_j} \\ Q_j = \gamma x_j + \gamma \frac{\partial}{\partial y_j} \mu(x+yf) + \delta \frac{\partial}{\partial y_j} \end{cases}$$

satisfaisant $[Q_j^i, P_j^i] = ik Id_D$, $j=1,2,\dots,k$, $\alpha, \omega, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, avec μ tel que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \mu(x+yf) \neq y_j, \quad \frac{\partial}{\partial y_j} \mu(x+yf) \neq -x_j, \quad j=1,2,\dots,k$$

et D approprié, proviennent d'une représentation de type réseau si

$$1^\circ \alpha, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad \omega, \delta \in i\mathbb{R} - \{0\}$$

$$2^\circ \alpha\delta = ik/2 = -\omega\gamma$$

$$3^\circ \mathcal{H} = \mathcal{H}_{m\tau}^{AC}$$

On peut choisir $a = \frac{1}{i\delta}$, $b = \frac{1}{i\omega}$ et m, θ tels que $m\theta = -\frac{k}{4\pi\delta\omega}$, $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Alors : Les opérateurs $\{Q_j^i, P_j^i\}_{j=1,2,\dots,k}$ avec $D = \mathcal{H}_{\pi\delta\tau}^{AC}$ proviennent de la représentation de type réseau $(\pi_{m\tau}^{AC}, \mathcal{H}_{m\tau}^{AC})$ du groupe de Heisenberg $H_p(2k+1)$, β défini par $\beta = \sigma - \delta\omega$, $\nu = \theta\mu$.

Exemple : La "représentation de Wigner" :

$$P_j^i = y_j - i\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad Q_j^i = x_j + i\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad j=1,2,\dots,k$$

($\mu=0$; $a = -\frac{1}{k}$; $b = \frac{1}{k}$; on peut choisir $m=-4$ et $\theta = \frac{1}{4\pi k}$).

Démonstration : Utiliser le lemme 4

Proposition 9(2)

Les opérateurs

$$\begin{cases} P_j^i = \alpha y_j - \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \underline{\mu}(xe+yf) + \omega \frac{\partial}{\partial x_j} \\ Q_j^i = \gamma x_j + \delta \frac{\partial}{\partial y_j} \underline{\mu}(xe+yf) + \delta \frac{\partial}{\partial y_j} \end{cases}$$

satisfaisant $[Q_j^i, P_k^i] = ik \delta_{jk} Id_D$, $j=1,2,\dots,k$, $\alpha, \omega, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, avec $\underline{\mu} = 0$,
proviennent d'une représentation de type position si

$$1^\circ \quad \alpha = \delta = 0 \quad , \quad \omega \in i\mathbb{R} - \{0\} \quad , \quad \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$2^\circ \quad -\omega\gamma = ik$$

$$3^\circ \quad \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^k) \quad \text{et} \quad D = J(\mathbb{R}^k)$$

On peut choisir $b = \frac{1}{i\omega}$ et a, λ, θ tels que $\frac{\lambda\theta}{a} = \frac{\delta}{4\pi}$

Alors : Les opérateurs $\{Q_j^i, P_j^i\}_{j=1,2,\dots,k}$ proviennent de la représentation de type position $(\pi_{\lambda_0}^{\theta A}, L^2(\mathbb{R}^k))$ du groupe de Heisenberg $H_{\theta\sigma_0}(2k+1)$.

Exemple : La représentation de Schrödinger :

$$P_j^i = \frac{k}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad Q_j^i = x_j \quad , \quad j=1,2,\dots,k$$

$$(a = \frac{1}{k} ; b = \frac{1}{k} ; \lambda = 1, \theta = \frac{1}{\sqrt{k}}).$$

Démonstration : Les opérateurs infinitésimaux de la représentation $(\pi_{\lambda_0}^{\theta A}, L^2(\mathbb{R}^k))$ de $H_{\theta\sigma_0}(2k+1)$ nous fournissent

$$P_{\lambda_0}^{\theta j} = \frac{1}{ib} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad Q_{\lambda_0}^{\theta j} = \frac{4\pi\lambda\theta}{a} x_j \quad ; \quad j=1,2,\dots,k \quad \blacksquare$$

Proposition 9(3)

Les opérateurs

$$\begin{cases} P_j^i = \alpha y_j - x \frac{\partial}{\partial x_j} (xe + yf) + \omega \frac{\partial}{\partial x_j} \\ Q_j^i = \gamma x_j + \gamma \frac{\partial}{\partial y_j} (xe + yf) + \delta \frac{\partial}{\partial y_j} \end{cases}$$

satisfaisant $[Q_j^i, P_j^i] = i\hbar \text{Id}_D$, $j=1,2,\dots,k$, $\alpha, \omega, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ avec $\mu=0$,
proviennent d'une représentation de type moment si

$$1^\circ \quad \omega = \gamma = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad \delta \neq 0$$

$$2^\circ \quad \alpha \delta = i\hbar$$

$$3^\circ \quad \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^k) \quad \text{et} \quad D = \mathcal{F}(\mathbb{R}^k)$$

On peut choisir $a = \frac{1}{i\delta}$ et b, λ, θ tels que $\frac{\lambda\theta}{b} = -\frac{\alpha}{4\pi}$

Alors : Les opérateurs $\{Q_j^i, P_j^i\}_{j=1,2,\dots,k}$ proviennent de la représentation de type moment $(\pi_{\lambda_0}^{\theta\beta}, L^2(\mathbb{R}^k))$ du groupe de Heisenberg $H_{\theta\sigma_0}^{(2k+1)}$.

Exemple : La représentation de Schrödinger :

$$P_j^i = y_j, \quad Q_j^i = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad j=1,2,\dots,k$$

$$(a = -\frac{1}{\hbar}, \quad b = \frac{1}{\hbar}, \quad \lambda = -1, \quad \theta = \frac{1}{4\pi\hbar}).$$

Démonstration :

Les opérateurs infinitésimaux de la représentation $(\pi_{\lambda_0}^{\theta\beta}, L^2(\mathbb{R}^k))$ de $H_{\theta\sigma_0}^{(2k+1)}$ nous fournissent

$$P_{\lambda_0}^{\theta j} = -\frac{4\pi\lambda\theta}{b} y_j, \quad Q_{\lambda_0}^{\theta j} = \frac{1}{i a} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad j=1,2,\dots,k \quad \blacksquare$$

Proposition 9(4)

Les opérateurs

$$\begin{cases} P_j^i = x y_j - \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \mu(xe + yf) + \omega \frac{\partial}{\partial x_j} \\ Q_j^i = \delta x_j + \gamma \frac{\partial}{\partial y_j} \mu(xe + yf) + \delta \frac{\partial}{\partial y_j} \end{cases}$$

satisfaisant $[Q_j^i, P_j^i] = i k I_d$, $j=1,2,\dots,k$, $\alpha, \omega, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, avec $\mu=0$ et D approprié, proviennent d'une représentation de "type position modifiée" si

$$1^\circ \quad \delta = 0, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad \omega \neq 0$$

$$2^\circ \quad -\omega \gamma = i k$$

$$3^\circ \quad \gamma t = \mathcal{H}_j^A$$

On peut choisir $b = \frac{1}{\varepsilon \omega}$ et a, λ, θ tels que $\frac{\lambda \theta}{a} = \frac{\gamma}{4\pi}$

Alors : Les opérateurs $\{Q_j^i, P_j^i\}_{j=1,2,\dots,k}$, avec $D = \mathcal{H}_{\pi_\lambda^A}^\infty$, proviennent de la représentation $(\pi_\lambda^{jA}, \mathcal{H}_j^A)$ du groupe de Heisenberg $H_{\theta\sigma_k}(2k+1)$, liée à la représentation de type position $(\pi_{\lambda_0}^{\theta A}, L^2(\mathbb{R}^k))$ de $H_{\theta\sigma_k}(2k+1)$ par l'isomorphisme $U_j^A : L^2(\mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathcal{H}_j^A$ envoyant ϕ sur ϕ_j défini par $\phi_j(x) = e^{i j x y} \phi(x)$, $y \in \mathbb{R} - \{0\}$, fixe.

Exemple : La "représentation de Berezin" :

$$P_j^i = y_j - i k \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad Q_j^i = x_j, \quad j=1,2,\dots,k$$

$$(b = \frac{1}{k}; a = \frac{1}{k}; \lambda = 1, \theta = \frac{1}{4\pi k}) \quad [\text{B.S.}] \quad \text{et} \quad [\text{J.F.}].$$

Démonstration :

Soit $(\pi_{\lambda_0}^{\theta A}, L^2(\mathbb{R}^k))$ la représentation de type position de $H_{\theta\sigma_k}(2k+1)$. Utilisant U_j^A , on trouve

$$(\pi_\lambda^{jA}(e^{b x} e^{y f} e^{x' e}) \phi_j)(x) = e^{i \pi \lambda k} e^{-i j x' y} e^{i \pi \lambda \theta x y} \phi_j(x + x')$$

où $t \in \mathbb{R}$, $x, x', y \in \mathbb{R}^k$, $\phi_j \in \mathcal{H}_j^A = U_j^A(L^2(\mathbb{R}^k))$.

Les opérateurs infinitésimaux de $(\pi_{\lambda}^{\mathbb{A}}, \mathcal{H}_{\mathbb{A}}^{\mathbb{A}})$ nous fournissent

$$P_{\lambda_0}^j = -\frac{3}{b} y_j + \frac{1}{ib} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad Q_{\lambda_0}^j = \frac{4\pi\lambda\theta}{a} x_j \quad , \quad j=1,2,\dots,k \quad \blacksquare$$

Proposition 9(5)

Les opérateurs

$$\begin{cases} P^j = \alpha y_j - \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \mu(x^* + y^* t) + \omega \frac{\partial}{\partial x_j} \\ Q^j = \gamma x_j + \gamma \frac{\partial}{\partial y_j} \mu(x^* + y^* t) + \delta \frac{\partial}{\partial y_j} \end{cases}$$

satisfaisant $[Q^j, P^i] = ik \delta_{ij} Id_D$, $j=1,2,\dots,k$, $\alpha, \omega, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, avec $\mu = 0$ et D approprié, proviennent d'une représentation de "type moment modifiée" si

$$1^\circ \quad \omega = 0 \quad , \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\} \quad , \quad \delta \in i\mathbb{R} - \{0\}$$

$$2^\circ \quad \alpha \delta = ik$$

$$3^\circ \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}}$$

On peut choisir $a = \frac{1}{i\delta}$ et b, λ, θ tels que $\frac{\lambda\theta}{b} = -\frac{\omega}{4\pi}$

Alors : Les opérateurs $\{Q^j, P^i\}_{j=1,2,\dots,k}$ avec $D = \mathcal{H}_{\pi_{\lambda}^{\mathbb{A}}}^{\infty}$, proviennent de la représentation $(\pi_{\lambda}^{\mathbb{B}}, \mathcal{H}_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}})$ du groupe de Heisenberg $H_{\theta_{\sigma_{\mathbb{A}}}(ik+i)}$, liée à la représentation de type moment $(\pi_{\lambda_0}^{\theta\mathbb{B}}, L^2(\mathbb{R}^k))$ de $H_{\theta_{\sigma_{\mathbb{A}}}(2k+i)}$ par l'isomorphisme $U_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}} : L^2(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{A}}^{\mathbb{B}}$ envoyant ϕ sur ϕ_j défini par $\phi_j(y) = e^{i3^{\mathbb{A}}y} \phi(y)$, $y \in \mathbb{R} - \{0\}$, fixe.

Démonstration :

Soit $(\pi_{\lambda_0}^{\otimes B}, L^2(\mathbb{R}^k))$ la représentation de type moment de $H_{\varepsilon\sigma_k}(2k+1)$.

Utilisant $\mathcal{U}_j^B$, on trouve

$$(\pi_{\lambda}^{\otimes B}(e^{i\alpha x} e^{i\beta y} e^{i\gamma z}) \phi_j)(y) = e^{i\pi\lambda\alpha} e^{-i\pi\lambda\beta y} e^{-i\pi\lambda\gamma z} e^{-i\pi\lambda\theta\alpha'y} \phi_j(y+y')$$

où $t \in \mathbb{R}$, $x', y, y' \in \mathbb{R}^k$, $\phi_j \in \mathcal{H}_j^B = \mathcal{U}_j^B(L^2(\mathbb{R}^k))$.

Les opérateurs infinitésimaux de $(\pi_{\lambda}^{\otimes B}, \mathcal{H}_j^B)$ nous fournissent

$$P_{\lambda_0}^{3j} = -\frac{4\pi\lambda\theta}{b} y_j, \quad Q_{\lambda_0}^{3j} = -\frac{j}{a} x_j + \frac{1}{ia} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad j=1,2,\dots,k \quad \blacksquare$$

Proposition 9(6)

Les opérateurs

$$\begin{cases} P^j = \alpha y_j - \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \mu(x+y) + \omega \frac{\partial}{\partial x_j} \\ Q^j = \delta x_j + \gamma \frac{\partial}{\partial y_j} \mu(x+y) + \delta \frac{\partial}{\partial y_j} \end{cases}$$

satisfaisant $[Q^j, P^j] = ik Id_D$, $j=1,2,\dots,k$, $\alpha, \omega, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, avec μ fixé défini par $\mu(x+y) = xy$, $x, y \in \mathbb{R}^k$ et D approprié, proviennent d'une représentation de type réseau si

- 1° $\alpha \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\omega, \delta \in i\mathbb{R} - \{0\}$
- 2° $-2\omega\gamma = ik$
- 3° $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{m\theta}^{\mathbb{R}^C}$

On peut choisir $a = \frac{1}{i\delta}$, $b = \frac{1}{i\omega}$ et m, θ tels que $m\theta = -\frac{k}{4\pi\delta\omega}$, $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Alors : Les opérateurs $\{Q^j, P^j\}_{j=1,2,\dots,k}$ avec $D = \mathcal{H}_{m\theta}^{\mathbb{R}^C}$, proviennent de la représentation de type réseau $(\pi_{m\theta}^{\mathbb{R}^C}, \mathcal{H}_{m\theta}^{\mathbb{R}^C})$ du groupe de Heisenberg $H_{\beta}(2k+1)$, β défini par $\beta = \sigma - \delta(\theta\omega)$, i.e. : $\beta(x+y, x'+y') = 2\theta xy'$ où $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^k$.

Exemple : La "représentation de Zak" :

$$P^j = \frac{k}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad Q^j = x_j + ik \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad j=1,2,\dots,k$$

(c.f. point (vi), construction de la représentation de Zak; prendre

$$\eta(x,y) = 0; \quad a = -\frac{1}{k}; \quad b = \frac{1}{k}; \quad m = -1, \quad \theta = \frac{1}{4\pi k}).$$

Démonstration : Utiliser le lemme 4 pour $\underline{\mu}(x+y) = xy$. β est défini

par $\beta(v, v') = \sigma(v, v') - \theta \underline{\mu}(v) - \theta \underline{\mu}(v') + \theta \underline{\mu}(v+v')$ où

$v = xe + yf$, $v' = x'e + y'f \in \mathbb{R}^{2k}$. C'est-à-dire

$$\beta(v, v') = \theta(xy' - yx') - \theta xy - \theta x'y' + \theta(x+x')(y+y')$$

Ce qui entraîne $\beta(v, v') = 2\theta x'y'$ ■

Proposition 9(7)

Les opérateurs

$$\begin{cases} P_j = \alpha y_j - \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \underline{\mu}(x+y) + \omega \frac{\partial}{\partial x_j} \\ Q_j = \gamma x_j + \gamma \frac{\partial}{\partial y_j} \underline{\mu}(x+y) + \delta \frac{\partial}{\partial y_j} \end{cases}$$

satisfaisant $[Q_j, P_i] = ik \text{Id}_D$, $j=1,2,\dots,k$, $\alpha, \omega, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, avec $\underline{\mu}$ fixé défini par $\underline{\mu}(x+y) = -xy$, $x, y \in \mathbb{R}^k$ et D appropriée, proviennent d'une représentation de type réseau si

$$1^\circ \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}, \delta, \omega \in i\mathbb{R} - \{0\}, \gamma \in \mathbb{C}$$

$$2^\circ 2\alpha\delta = ik$$

$$3^\circ \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\pi}^{PC}$$

On peut choisir $a = \frac{1}{2\delta}$, $b = \frac{1}{i\omega}$ et m, θ tels que $\pi\theta = -\frac{i}{\pi\delta\omega}$, $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$

Alors : Les opérateurs $\{Q_j, P_j\}_{j=1,2,\dots,k}$ avec $D = \mathcal{H}_{\pi}^{PC}$, proviennent de la représentation de type réseau $(\pi_{\pi}^{PC}, \mathcal{H}_{\pi}^{PC})$ du groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_p(2k+1)$, β défini par $\beta = \sigma - \delta(\theta \underline{\mu})$, i.e.

$$\beta(xe + yf, x'e + y'f) = -2\theta x'y' \quad \text{où} \quad x, x', y, y' \in \mathbb{R}^k.$$

Démonstration : Utiliser le lemme 4 pour $\underline{\mu}(x+y) = -xy$. β est défini par

$\beta(v, v') = \sigma(v, v') - \theta \underline{\mu}(v) - \theta \underline{\mu}(v') + \theta \underline{\mu}(v+v')$ où $v = xe + yf$, $v' = x'e + y'f \in \mathbb{R}^{2k}$.

C'est-à-dire $\beta(v, v') = \theta(xy' - yx') + \theta xy + \theta x'y' - \theta(x+x')(y+y')$

Ce qui entraîne $\beta(v, v') = -2\theta x'y'$ ■

Proposition 9(8)

Les opérateurs

$$\begin{cases} P_j = \alpha y_j - \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \mu(xe + yf) + \omega \frac{\partial}{\partial x_j} \\ Q_j = \gamma x_j + \gamma \frac{\partial}{\partial y_j} \mu(xe + yf) + \delta \frac{\partial}{\partial y_j} \end{cases}$$

satisfaisant $[Q_j, P_i] = i\hbar \text{Id}_D$, $j=1,2,\dots,k$, $\alpha, \omega, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, avec μ fixé défini par $\mu(xe + yf) = xy - \frac{i}{2\pi m\theta} \eta(y, x)$, η polynomiale et D approprié, proviennent d'une représentation de type réseau si

$$1^\circ \quad \omega, \delta \in i\mathbb{R} - \{0\}, \quad \alpha, \gamma \neq 0$$

$$2^\circ \quad \alpha\delta = \frac{i\hbar}{2} = -\omega\gamma \quad \text{et} \quad \omega\delta = \hbar^2$$

$$3^\circ \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_{m\tau}^{p,c}$$

On peut choisir $a = \frac{1}{i\delta}$, $b = \frac{1}{i\omega}$ et m, θ tels que $m\theta = -\frac{1}{4\pi\hbar}$, $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Alors : Les opérateurs $\{Q_j, P_j\}_{j=1,2,\dots,k}$ avec $D = \mathcal{H}_{m\tau}^{p,c}$, proviennent de la représentation de type réseau $(\pi_{m\tau}^{p,c}, \mathcal{H}_{m\tau}^{p,c})$ du groupe de Heisenberg $H_{\beta}(2k+1)$, β défini par $\beta = \sigma - \delta\nu$, $\nu(xe + yf) = \theta(xy - \frac{i}{2\pi m\theta} \eta(y, x))$, $x, y \in \mathbb{R}^k$.

Les fonctions $C^q(k, q)$ satisfont la même quasi périodicité que les fonctions de $\mathcal{H}_{m\tau}^{p,c}$ et les $\{Q_j, P_j\}_{j=1,2,\dots,k'}$ sont exactement les opérateurs de la représentation de Schrödinger $\{Q_j^i, P_j^i\}_{j=1,2,\dots,k'}$ de $H_{\theta\sigma_{\epsilon}}(2k'+1)$ écrits dans la représentation k_q^q , seulement si

(a) m est pair, dans ce cas $T(\ell) = \frac{1}{2\pi\hbar} \mu(\ell)$, $\ell \in L_\theta$, $\theta = -\frac{1}{4\pi\hbar m}$ ou

(b) $m = \pm 1$ et $T(\ell) = F'(\ell) + \frac{1}{2\pi\hbar} \mu(\ell)$, $\ell \in L_\theta = L$, $\theta = \pm \frac{1}{4\pi\hbar}$ respectivement,

(prendre $\mathbb{R}^{2k'}$ au lieu de $\mathbb{R}^{2k}$ et poser $k=y$, $q=x \in \mathbb{R}^{k'}$).

Démonstration :

- i) Introduisant $\mu(x+y) = xy - \frac{1}{2\pi m \theta} \gamma(y, x)$ dans les opérateurs Q^j, P^j de notre proposition on a

$$\begin{cases} P^j = \frac{\alpha}{2\pi m \theta} \frac{\partial}{\partial x_j} \gamma(y, x) + \omega \frac{\partial}{\partial x_j} \\ Q^j = i \delta x_j - \frac{\delta}{2\pi m \theta} \frac{\partial}{\partial y_j} \gamma(y, x) + \delta \frac{\partial}{\partial y_j} \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, k' \quad (k=k')$$

Avec les conditions 1°, 2°, 3° et les choix indiqués de α, b, m et θ , on est dans un cas particulier de la proposition 9(1).

- ii) D'autre part, soit

$$\begin{cases} P^j = -\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x_j} \gamma(y, x) + \frac{1}{ib} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ Q^j = -\frac{1}{a} x_j - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial y_j} \gamma(y, x) + \frac{1}{ia} \frac{\partial}{\partial y_j} \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, k'$$

les opérateurs $\{Q_{\lambda_0}^{0j}, P_{\lambda_0}^{0j}\}_{j=1, 2, \dots, k'}$ de la représentation de Schrödinger de $\mathcal{H}_{\theta, \sigma_0}(2k'+1)$, écrits dans la représentation k_q^0 (voir (vi) de la construction de la représentation de Zak), où l'on a posé $y=k, x=q \in \mathbb{R}^{k'}$ et où $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ sont reliés par $ab = -\frac{1}{k}$ (pour que $\{Q^j, P^j\} = i k I_{2D}$).

- iii) La comparaison des opérateurs sous i) et ii) implique

$$a = \frac{1}{i\delta}, b = \frac{1}{i\omega}, \omega\delta = k' \text{ et } m, \theta \text{ à choix liés par } m\theta = -\frac{1}{4\pi k}.$$

- iv) $C^0(k, q)$ est quasi périodique sur le réseau L_θ ; définissons

$\phi(x, y) = C^0(k, q)$; on a

$$\phi\left(x+r, y + \frac{1}{i\theta} r\right) = e^{\frac{i}{k} k r} e^{i\left(\gamma\left(y + \frac{1}{i\theta} r, x+r\right) - \gamma(y, x)\right)} \phi(x, y) \quad \text{où } v = x + y \in \mathbb{R}^{2k'}$$

et $\ell = re + \frac{1}{i\theta} r \in L_\theta$. D'autre part

$$1^0 \quad \eta\left(y + \frac{1}{2\theta} s, x+r\right) - \eta(y, x) = 2i\pi m \theta \left(\frac{1}{2\theta} rs + \frac{1}{2\theta} sx + ry - \underline{\mu}(v+l) + \underline{\mu}(v) \right)$$

$$2^0 \quad \beta = \sigma - \delta \nu, \nu - \theta \underline{\mu} \iff \underline{\mu}(v) - \underline{\mu}(v+l) = \sigma_r(l, v) - \frac{1}{\theta} \beta(l, v) - \underline{\mu}(l)$$

$$3^0 \quad m\theta = -\frac{1}{4\pi k} \implies \frac{1}{k} = -4\pi m\theta$$

$$\text{D'où } \phi(v+l) = e^{-2i\pi m \beta(l, v)} e^{i\pi(mrs - 2m\theta \underline{\mu}(l))} \phi(v) \quad \text{et on doit avoir}$$

$$\phi(v+l) = e^{-2i\pi m \beta(l, v)} e^{i\pi T(l)} \phi(v). \text{ On en déduit (a) et (b) } \blacksquare$$

CONCLUSION : Les changements de sections apparaissant dans la théorie d'extension de groupes, développée au §I.2., appliquée à $\mathbb{R}^{1k}$ au §II.1. pour construire les groupes de Heisenberg $H_p(1k+1)$, β défini par $\sigma = \beta \delta \nu$, permettent de trouver dans bien des cas la provenance d'un ensemble d'opérateurs autoadjoints $\{Q^i, P^i\}_{i=1,2,\dots,k}$, satisfaisant les relations de commutation canoniques $\{Q^i, P^j\} = i\hbar \delta_{ij}$ sur un sous-espace dense D d'un certain espace de Hilbert.

CHAPITRE III : LES REPRESENTATIONS CONTINUES UNITAIRES IRREDUCTIBLES DES GROUPES DE HEISENBERG DANS LA PRATIQUE

Nous allons énoncer quelques problèmes et voir comment l'utilisation des représentations continues unitaires irréductibles d'un groupe de Heisenberg, de leurs espaces de représentation et de leurs opérateurs d'entrelacement permet d'en faciliter la résolution.

Problème 1

On se demande tout d'abord dans le §III.1. s'il est possible de trouver une "bonne base" de l'espace des fonctions de carré intégrable sur la variété quotient d'un groupe de Heisenberg à 3 dimensions par un sous-groupe discret, "base" qui jouerait un rôle analogue à celui de la base orthonormée des caractères dans l'analyse de Fourier sur le tore. La solution de ce problème repose sur la recherche d'une "bonne base" d'un sous-espace de Hilbert de cet espace de fonctions, ce sous-espace de Hilbert s'avère être isomorphe à l'espace de la représentation de type réseau du groupe de Heisenberg considéré.

Problème 2

Le deuxième problème, §III.2., consiste à construire les systèmes d'états cohérents généralisés des groupes de Heisenberg, à étudier les propriétés d'un système particulier coïncidant avec les états cohérents de Glauber, et à se demander si on peut extraire de ce dernier système d'états un sous-système total minimal dans l'espace considéré (dans le but de pouvoir développer une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ dans ces états en ayant la garantie de "l'unicité" des coefficients du développement). Actuellement une réponse à cette dernière question n'existe que lorsqu'on travaille avec un groupe de Heisenberg de dimension 3. La démonstration la plus simple (proposition 4) se fait en se plaçant dans la représentation de type réseau du groupe considéré.

N.B. Il est intéressant de constater que la "bonne base" du sous-espace de Hilbert de l'espace des fonctions du problème 1, est un sous-système total d'un système d'états cohérents du groupe de Heisenberg en question.

Problème 3

Ce dernier problème, §III.3., se divise en trois parties.

§III.3.1. Ayant déterminé le groupe de symétrie de translation de l'hamiltonien d'un électron soumis à un champ magnétique constant, on examine tout d'abord si le résultat dépend du choix de la jauge et du choix du champ (proposition 7), puis on essaie d'identifier ce groupe avec "quelque chose" qui possède une signification physique.

§III.3.2. Se restreignant à l'étude du mouvement de l'électron dans le plan perpendiculaire au champ, on a que le groupe de symétrie de translation de l'hamiltonien du système est un groupe de Heisenberg. Tirant parti des connaissances que nous avons de ce groupe, est-il possible de construire un ensemble de fonctions propres de l'hamiltonien qui soit total minimal dans l'espace de Hilbert engendré par les fonctions propres de cet opérateur, pour chaque niveau de Landau ? La clef du problème est un système d'états cohérents.

§III.3.3. A la différence du cas sans potentiel cristallin, le groupe de symétrie de translation de l'hamiltonien d'un électron soumis à un champ magnétique constant et à un potentiel cristallin n'est pas indépendant du choix de la jauge et du choix du champ (proposition 14). Les groupes de symétrie de translation sont de types différents selon que le champ magnétique est rationnel ou irrationnel. Comment se manifeste physiquement cette différence ? On examine cette question dans le cas particulier où le champ magnétique est parallèle à un axe du cristal et on mentionne quelques propriétés du spectre de l'hamiltonien de ce système.

§ III.1. ANALYSE HARMONIQUE SUR LA VARIÉTÉ DE HEISENBERG

Une des branches de la théorie de représentation des groupes, appelée analyse harmonique, consiste à étudier les espaces de fonctions sur les groupes et les espaces homogènes.

Considérons $H_p(3)$, p défini par $p(v, v') = \frac{1}{2}x'$ où $v = xe + yf$, $v' = x'e + y'f \in \mathbb{R}^2$

(i.e. : le groupe de Heisenberg des matrices 3×3 de la forme $\begin{pmatrix} 1 & y & t \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$t, x, y \in \mathbb{R}$; on identifie $e^{tu} \cdot e^{xe + yf} \in H_p(3)$ avec $\begin{pmatrix} 1 & y & t \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

soit $\Gamma = \{e^{tu} \cdot e^{xe + yf}; t, r, s \in \mathbb{Z}\}$

un sous-groupe discret de $H_p(3)$.

- Définition 1 : L'espace homogène $\Gamma \backslash H_p(3)$, muni d'une mesure invariante sous les translations à droite $\Gamma g \rightarrow \Gamma g g'$, $g, g' \in H_p(3)$, est appelé VARIÉTÉ DE HEISENBERG.

Soit $L^2(\Gamma \backslash H_p(3))$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $\Gamma \backslash H_p(3)$. Nous n'allons pas étudier en détail cet espace de fonctions, mais relevons les faits essentiels suivants, relatifs au sous-espace de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda$, le plus important de $L^2(\Gamma \backslash H_p(3))$ ([A.T.] et [To.]).

- 1 Soit $\mathcal{R}$ la représentation "régulière droite" de $H_p(3)$ sur $L^2(\Gamma \backslash H_p(3))$ (i.e. : $(\mathcal{R}(g')f)(g) = f(gg')$, $g, g' \in H_p(3)$, $f \in L^2(\Gamma \backslash H_p(3))$), et $\Delta = \{e^{n\omega}; n \in \mathbb{Z}\}$ le noyau de $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ est donc une représentation unitaire de $H_p(3)/\Delta$ sur $L^2(\Gamma \backslash H_p(3))$, et puisque $\mathbb{Z}/\Delta \cong [0, 1[$ est un sous-groupe compact abélien de $H_p(3)/\Delta$, $L^2(\Gamma \backslash H_p(3))$ se décompose en somme directe orthogonale de sous-espaces de Hilbert $\mathcal{R}$ -invariants

$$L^2(\Gamma \backslash H_p(3)) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$$

où : $\mathbb{Z}$ est le dual de $[0, 1[$,

$$\mathcal{H}_n = \left\{ f \in L^2(\Gamma \backslash H_p(3)) \text{ t.q. } (\mathcal{R}(e^{tu})f)(g) = e^{i n t} f(g); t \in \mathbb{R}, g \in H_p(3) \right\}$$

$\mathcal{H}_n$ étant de "multiplicité" $|n|$ lorsque $n \neq 0$.

En particulier

- (1) Lorsque $n=0$, $\mathcal{H}_0$ s'identifie avec l'espace $L^2(\mathbb{T}^2)$ où $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ est le tore à deux dimensions.
- (2) $\mathcal{H}_{-n}$ s'identifie avec $\mathcal{H}_{n, n \in \mathbb{Z} - \{0\}}$, par conjugaison complexe.
- (3) Quant à l'espace $\mathcal{H}_1$, c'est un des deux sous-espaces irréductibles de $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H}_p(3))$; ($\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_{-1}$ sont de multiplicité 1); de ce fait, il tient le rôle principal dans l'analyse de $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H}_p(3))$. $\mathcal{H}_1$ s'identifie à un espace connu

Proposition 1

Soit $\mathcal{H}_{10}^{\mathbb{R}^C}$ l'espace de Hilbert de la représentation de type réseau $(\pi_{10}^{\mathbb{R}^C}, \mathcal{H}_{10}^{\mathbb{R}^C})$ de $\mathbb{H}_p(3)$ (c.f. §II.4., point C.).

(i) L'application $\eta: \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_{10}^{\mathbb{R}^C}$, envoyant ϕ sur Ψ par

$$\Psi(x, y) = e^{-2i\pi t} \phi(t, (x, y)), \quad t, x, y \in \mathbb{R}, \text{ est un isomorphisme unitaire.}$$

(ii) L'application de Weil $W: L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{H}_1$, envoyant f sur

$$(Wf)(t, (x, y)) = e^{2i\pi t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(y+n) e^{2i\pi n x}, \text{ est un isomorphisme}$$

unitaire.

$\eta \circ W$ est l'opérateur d'entrelacement entre la représentation de type moment $(\pi_{10}^{\mathbb{R}^B}, L^2(\mathbb{R}))$ de $\mathbb{H}_p(3)$ et $(\pi_{10}^{\mathbb{R}^C}, \mathcal{H}_{10}^{\mathbb{R}^C})$.

Démonstration :

On a

$$a) \quad (\pi_{10}^{\mathbb{R}^B}(e^{tu_0} e^{x'e+y'f})\phi)(y) = e^{2i\pi t} e^{2i\pi x'y} \phi(y+y') \text{ où } t, x', y, y' \in \mathbb{R}, \phi \in L^2(\mathbb{R})$$

(construction par analogie à la proposition B, Ch. II).

b) $\beta(v, v') = x'y$, $v = xe + yf$, $v' = x'e + y'f \in \mathbb{R}^2$; on peut voir que $\beta \in [-\frac{1}{2}\sigma, \frac{1}{2}\sigma]$

i.e. $-\frac{1}{2}\sigma = \beta + \delta\nu$, avec $\nu(v) = \frac{1}{2}xy$.

$$L_{-\frac{1}{2}} = \{ \ell = re + rf ; r, s \in \mathbb{Z} \} ; T(\ell) = F(\ell) - 2m\nu(\ell)$$

est identiquement nul, pour $m=1$ et $F=F'$, ce que nous choisissons.

D'où

$$\mathcal{H}_{10}^{\beta C} = \left\{ \Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} ; (1) \Psi \text{ est borélienne sur } \mathbb{R}^2 ; \right.$$

$$(2) \int |\Psi(v)|^2 dv < +\infty ; (3) \Psi \text{ est quasi périodique sur } L_{-\frac{1}{2}}$$

$$G \times [0, 1[\times [0, 1[$$

$$\text{i.e. } \Psi(v+\ell) = e^{-2i\pi\beta(\ell, v)} \Psi(v) \quad , v \in \mathbb{R}^2, \ell \in L_{-\frac{1}{2}} \quad \left\{ \right.$$

$$\text{et } (\pi_{10}^{\beta C}(e^{2i\pi\beta(v')} \Psi))(v) = e^{2i\pi t} e^{2i\pi\beta(v, v')} \Psi(v+v')$$

$$\text{où } t \in \mathbb{R}, v, v' \in \mathbb{R}^2, \Psi \in \mathcal{H}_{10}^{\beta C}.$$

c) Par analogie à la démonstration du §II.3. proposition 7, on calcule

l'opérateur d'entrelacement entre les représentations décrites sous

a) et b)

$$\Psi(x, y) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi r x} \phi(y+r)$$



2

Transformons par l'opérateur de Weil la fonction $v_0(x) = e^{-\pi x^2}$ de $L^2(\mathbb{R})$ (v_0 appartient à la base de $L^2(\mathbb{R})$ formée des fonctions d'Hermite).

$$\begin{aligned} (W_{v_0})(t, (x, y)) &= e^{2i\pi t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(y+n)^2} e^{2i\pi n x} \\ &= e^{2i\pi t} e^{-\pi y^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2} e^{2i\pi n(x+iy)} \\ &= e^{2i\pi t} e^{-\pi y^2} \Theta_1(\pi(x+iy) | i) \end{aligned}$$

où $\Theta_3(z|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 \tau} e^{i\pi n z}$, $z \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathbb{C}$ avec $\text{Im}(\tau) > 0$, est une des quatre fonctions thêta classiques de Jacobi (voir Ch. XXI de [W.W.]). Cela suggère qu'il peut y avoir un lien entre les fonctions thêta de Jacobi et les fonctions dans les espaces $\mathcal{H}_{n,n \in \mathbb{Z}}$. En fait, la recherche d'une bonne base de $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H}_g(3))$, qui jouerait un rôle analogue à celui de la base orthonormale $\{e^{2i\pi n x} ; n \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{T})$ dans l'analyse de Fourier sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, nous conduit à utiliser explicitement les fonctions thêta.

Par exemple, pour l'espace $\mathcal{H}_1$, on a le résultat suivant.

Le système de fonctions

$$\left\{ \Psi_{mn}(t, (x, y)) = e^{2i\pi m x} e^{2i\pi n y} (W_{V_0})(t, (x, y)) ; m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

est total dans $\mathcal{H}_1$ (ceci découle du Th. II.5 de [A.T.], théorème qui traite le cas général $\mathcal{H}_{n,n \in \mathbb{Z}}$). On remarquera que $\{\Psi_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas un système de fonctions orthonormales dans $\mathcal{H}_1$.

Proposition 2

- (i) L'image du système $\{\Psi_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ dans l'espace de la représentation de type moment $(\pi_{10}^B, L^2(\mathbb{R}))$ de $\mathbb{H}_g(3)$ est

$$\left\{ \phi_{mn}(y) = e^{2i\pi m y} e^{-\pi(y-n)^2} \right\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$$

- (ii) Soit $(.,.)$ le produit scalaire dans $\mathcal{H}_1$.

$$(\Psi_{m_1 n_1}, \Psi_{m_2 n_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{2}((m_1 - m_2)^2 + (n_1 - n_2)^2)} e^{i\pi(m_1 - m_2)(n_1 - n_2)}$$

q.q.s. $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.

- (iii) L'image du système $\{\Psi_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ dans l'espace de la représentation de type position $(\pi_{10}^A, L^2(\mathbb{R}))$ de $\mathbb{H}_g(3)$ est

$$\left\{ \psi_{mn}(x) = e^{-\pi(x+m)^2} e^{2i\pi n x} e^{2i\pi m m} \right\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$$

Démonstration :

- (i) Utiliser l'application W^{-1} , inverse de l'application de Weil W ;

$$(W^{-1}\Psi)(y) = e^{-i\pi y} \int_0^1 dx \Psi(t, (x, y)) \quad , \Psi \in \mathcal{H}_1 \quad , t, y \in \mathbb{R} .$$

- (ii) Puisque W est unitaire

$$(\Psi_{m_1 n_1}, \Psi_{m_2 n_2})_{\mathcal{H}_1} = (\phi_{m_1 n_1}, \phi_{m_2 n_2})_{L^1(\mathbb{R})} ;$$

$$(\phi_{m_1 n_1}, \phi_{m_2 n_2}) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\pi t(m_2 - m_1)} e^{-\pi(t - n_2)^2} e^{-\pi(t - n_1)^2} dt$$

Posons $s = t - n_1$

$$\begin{aligned} (\phi_{m_1 n_1}, \phi_{m_2 n_2}) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi s^2} e^{-\pi(s + n_2 - n_1)^2} e^{i\pi s(m_2 - m_1)} ds \\ &= e^{-\pi(n_2 - n_1)^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\pi s^2} e^{i\pi s(m_2 - m_1) - i\pi(n_2 - n_1)s} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\pi(n_2 - n_1)^2} e^{\frac{i}{2\pi} (i\pi(m_2 - m_1) - i\pi(n_2 - n_1))^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{2} ((m_2 - m_1)^2 + (n_2 - n_1)^2)} e^{i\pi(m_2 - m_1)(n_2 - n_1)} \end{aligned}$$

(on a utilisé la formule No 3.323(2) p. 307 de [G.R.]).

- (iii) On passe de $(\pi_{10}^B, L^1(\mathbb{R}))$ à $(\pi_{10}^A, L^1(\mathbb{R}))$ par la transformée de Fourier

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} dy e^{i\pi xy} \phi(y) \quad , \phi \in L^1(\mathbb{R}) \quad \blacksquare$$

Remarque 1 : On souligne ici que les auteurs de [A.T.] p. 23, établissent que l'ensemble de fonctions $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est total minimal dans $\mathcal{H}_1$. Or ce n'est pas vrai (voir contre-exemple dans le paragraphe suivant). L'erreur est dans leur application $I : L^1(\mathbb{T}, 1) \rightarrow \mathcal{H}_1$ p. 22, qui n'est pas surjective. Cela est sans conséquence dans leurs travaux postérieurs, car ils n'utilisent que la totalité du système, jamais le fait qu'il soit minimal.

Les théorèmes de structure pour $\mathcal{H}_1$ ([A.T.] et [To.]) fournissent de précieux renseignements sur certaines classes de fonctions :

a) Chaque fonction continue appartenant à $\mathcal{H}_1$ s'annule en un point.

b) Pour $\Psi \in \mathcal{H}_1 \cap C^\infty$ et satisfaisant $\left. \frac{\partial^j}{\partial \bar{z}^j} \Psi(t, (x, y)) \right|_{(0, (t, t))} = 0$, $j = 0, 1, 2, 3$,

$\bar{z} = x - iy$, nous avons $\Psi = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} b_{mn} \Psi_{mn}$, la série convergeant absolument

et uniformément dans $\mathcal{H}_1$ ($b_{mn} \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{Z}$).

Le passage aux espaces $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, se fait par un processus algébrique développé dans [A.T.], qui permet de translater les résultats de $\mathcal{H}_1$ à $\mathcal{H}_n$.

CONCLUSION : Le pas essentiel dans l'analyse harmonique sur la variété de Heisenberg $\Gamma \backslash H_p(3)$, consiste à étudier un sous-espace de Hilbert de $L^2(\Gamma \backslash H_p(3))$, $\mathcal{H}_1$, qui est isomorphe à l'espace de la représentation de type réseau $(\pi_{10}^{\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{10}^{\mathbb{C}})$ de $H_p(3)$. $\mathcal{H}_1$ est engendré par les combinaisons linéaires finies de fonctions non orthonormales Ψ_{mn} , $m, n \in \mathbb{Z}$, liées de manière simple aux fonctions bien connues "thêta trois" de Jacobi.

Dans le prochain paragraphe, nous allons définir un système d'états cohérents généralisés pour un groupe de Lie quelconque, associé à une de ses représentations continues unitaires irréductibles sur un espace de Hilbert, et étudier les propriétés d'un tel système dans le cas particulier d'un groupe de Heisenberg.

Nous verrons alors que le bon système total de fonctions utilisé par Auslander-Tolimieri [A.T.] n'est rien d'autre qu'un sous-système d'un système d'états cohérents généralisés pour $H_p(3)$.

§III.2. ETATS COHERENTS

L'expression "état cohérent" apparaît pour la première fois dans la littérature en 1963 dans une étude de Glauber [Gl.1] de la statistique purement quantique du champ de radiation. Il s'agit d'états qui permettent la factorisation des fonctions de corrélation d'un champ de radiation quelconque, condition habituellement utilisée pour définir des champs totalement cohérents [Gl.2]; en particulier, ils permettent de donner une description quantique adéquate d'un rayon cohérent de lumière laser. Glauber les appelle "états cohérents de champ"; aujourd'hui ils portent son nom, bien que de tels paquets d'onde aient été introduits en mécanique quantique en 1926 déjà par Schrödinger [Sch.] pour l'étude d'oscillateurs harmoniques forcés, et aient été utilisés par plusieurs auteurs à divers desseins (voir [Gl.1] et la bibliographie du chapitre 7 de [K.S.]). Par exemple, de tels états apparaissent chez Schwinger [Schw.] en 1953, comme fonctions génératrices d'états de Fock, chez von Neumann [von N.2] en 1955 à propos de la compréhension des relations d'incertitude, et chez Bargmann [Ba.3] en 1961, comme éléments privilégiés d'un espace de Hilbert de fonctions analytiques.

L'année 1971 est une sorte de renaissance des états cohérents. On peut grouper les intérêts en trois catégories :

- 1) Etude approfondie des propriétés des états cohérents; en particulier recherche d'un sous-ensemble "total minimal" d'états cohérents dans $L^2(\mathbb{R})$ (dans le but de pouvoir développer une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ dans ces états en ayant la garantie de "l'unicité" des coefficients du développement) [Pe.1] (1971), [B.B.G.K.] (1971), [B.G.Z.1] (1975), [B.Z.] (1978).
- 2) Nouvelles utilisations des états cohérents de Glauber; non seulement en optique quantique et en radiophysique, mais aussi en théorie quantique des champs, en mécanique statistique, en liaison avec l'effet Jahn-Teller, dans la théorie de superfluidité, etc.

3) Généralisation des états cohérents et applications :

Les états cohérents de Glauber sont étroitement liés au groupe de Heisenberg, et s'avèrent très utiles quand le groupe de symétrie dynamique de l'hamiltonien du système considéré est précisément le groupe de Heisenberg; existe-t-il un système d'états analogue à celui des états cohérents de Glauber, pour d'autres groupes ?

- a) Pour le groupe $SU(2)$, Radcliffe [Ra.] en 1971 et Arecchi-Courten-Gilmore-Thomas [A.C.G.T.] en 1972, ont introduit indépendamment des états cohérents analogues qu'ils nomment "de spin" et "de Bloch ou atomiques", respectivement.
- b) En 1971, Barut et Girardello [B.G.] définissent des états cohérents généralisés pour certains groupes de Lie, puis en 1972, Pérélov [Pe.2] en définit pour un groupe de Lie quelconque.

Les autres définitions et applications d'états cohérents généralisés établies ces dernières années reposent sur les quatre travaux fondamentaux cités ci-dessus.

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser la définition de Pérélov pour construire les systèmes d'états cohérents généralisés du groupe de Heisenberg $H(1, k+1)$; dans le cas particulier qui coïncide avec les états cohérents de Glauber, nous établirons les propriétés les plus importantes de ce système d'états cohérents par des méthodes qui relèvent de la théorie des groupes.

● Définition 2 : (Etats cohérents généralisés du type de Pérélov [Pe.2]).

Soient :

G un groupe de Lie;

$\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $(., .)$ le produit scalaire dans $\mathcal{H}$;

T une représentation continue unitaire irréductible de G sur $\mathcal{H}$;

Ψ_0 un élément fixé de $\mathcal{H}$;

$$H = \left\{ g \in G; T(g)\Psi_0 = e^{i\nu(g)}\Psi_0, \text{ avec } \nu : G \longrightarrow \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-groupe de G appelé le groupe stationnaire de Ψ_0 ;

● Définition 2 : $\Psi_g = T(g)\Psi_0$, $g \in G$;

(suite)

On voit que deux éléments g, g' de G , appartenant à la même classe à gauche $\dot{g} = gH \in G/H$, donnent lieu à $\Psi_g, \Psi_{g'}$ respectivement liés par un facteur de phase

(i.e. : si $g' = gh, h \in H$, on a $\Psi_{g'} = e^{i\omega(h)}\Psi_g$).

L'ensemble $\{ \Psi_g = T(g)\Psi_0 ; g \in G, \text{ un seul représentant par classe } \dot{g} \in G/H \}$ est appelé SYSTEME d'ETATS COHERENTS de type (T, Ψ_0) .

On nomme COEFFICIENT $c_{..}$ de T l'application de G dans $\mathbb{C}$ envoyant g sur $(\Psi_0, T(g)\Psi_0)$.

Lorsque le coefficient $c_{..}$ de T est dans $L^2(G)$

(i.e. : lorsque $\int_{G/H} |(\Psi_0, T(g)\Psi_0)|^2 dg < +\infty$, avec le même abus

de notation que dans la Déf. 4, Ch. II), l'ensemble

$\{ \Psi_g = T(g)\Psi_0 ; g \in G, \text{ un seul représentant par classe } \dot{g} \in G/H \}$ est appelé SYSTEME d'ETATS COHERENTS de CARRE INTEGRABLE.

Construction des systèmes d'états cohérents généralisés du groupe de Heisenberg $H(2k+1)$

Soient $H(2k+1), (\pi_\lambda^{D_r}, \mathcal{H}_\lambda^{D_r})$ avec $r=1$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, $r=2$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^- - \{0\}$, la représentation de type B.F.S. de $H(2k+1)$ induite à gauche (Ch. II. Prop. D', $r=1,2$) et Ψ_0 un élément fixé de $\mathcal{H}_\lambda^{D_r}$. Le groupe stationnaire de Ψ_0 est le centre Z de $H(2k+1)$ (quel que soit le choix de Ψ_0 !). $H(2k+1)/Z$ étant isomorphe à $\mathbb{C}^k$, et tout élément $g \in H(2k+1)$ pouvant s'écrire $g = e^{i\alpha_0} e^{i\alpha + y\beta} = e^{i\alpha_0} e^{i\alpha + \bar{\alpha}\alpha^-}$, $\alpha = x + iy, x, y \in \mathbb{R}^k$, l'ensemble

$$\left\{ \Psi_{\sum_{jk} \alpha} = \pi_\lambda^{D_r} (e^{i\alpha^+ + \bar{\alpha}\alpha^-}) \Psi_0, \alpha \in \mathbb{C}^k \right\}$$

est le système d'états cohérents de type $(\pi_\lambda^{D_r}, \Psi_0)$ de $H(2k+1)$. Explicitement

pour $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, $\Psi_{\sum_{jk} \alpha}(z) = e^{-\frac{\lambda}{2k} \alpha \bar{\alpha}} e^{\frac{\lambda}{2k} z \bar{\alpha}} \Psi_0(z - \alpha)$, $z \in \mathbb{C}^k$, q.q.s. $\alpha \in \mathbb{C}^k$.

pour $\lambda \in \mathbb{R}^- - \{0\}$, $\Psi_{\sum_{jk} \alpha}(\bar{z}) = e^{-\frac{|\lambda|}{2k} \bar{\alpha} \alpha} e^{\frac{|\lambda|}{2k} \bar{z} \alpha} \Psi_0(\bar{z} - \bar{\alpha})$, $\bar{z} \in \mathbb{C}^k$, q.q.s. $\alpha \in \mathbb{C}^k$.

Proposition 3

Notons $C_{\Psi_0}^{\lambda}$ le système d'états cohérents de type $(\pi_{\lambda}^{D_r}, \Psi_0)$.

$$\left\{ C_{\Psi_0}^{\lambda}; \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}, \Psi_0 \in \mathcal{H}_{\lambda}^{D_r} \text{ avec } r=1 \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}, r=2 \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}^- - \{0\} \right\}$$

constitue l'ensemble de tous les systèmes d'états cohérents généralisés du groupe de Heisenberg $H(2k+1)$ (tous les systèmes non triviaux et à isomorphisme près).

Démonstration :

$\left\{ \pi_{\lambda}^{D_r}; \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}; r=1 \text{ si } \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}, r=2 \text{ si } \lambda \in \mathbb{R}^- - \{0\} \right\} \cup \left\{ \text{caractères de } H(2k+1) \right\}$ forme l'ensemble de toutes les représentations continues unitaires irréductibles de $H(2k+1)$. (c.f. §II.1. Prop. 2). Les caractères de $H(2k+1)$ donnent lieu à des systèmes d'états cohérents triviaux. i.e. : formés d'un élément ■

Propriétés du système d'états cohérents généralisés $C_{\Psi_0}^{\lambda}$ de $H(2k+1)$, avec $\Psi_0 = (|\lambda|/4\pi k)^{k/2}$, λ quelconque appartenant à $\mathbb{R} - \{0\}$.

On remarquera que l'on a choisi pour Ψ_0 l'élément constant de la base orthonormée suivante de $\mathcal{H}_{\lambda}^{D_1}$ quand $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ (respectivement de $\mathcal{H}_{\lambda}^{D_2}$ quand $\lambda \in \mathbb{R}^- - \{0\}$)

$$\left\{ u_{m_1 \dots m_k}(z_1, \dots, z_k) = \frac{\left(\frac{|\lambda|}{2k}\right)^{\sum_{j=1}^k \frac{m_j+1}{2}}}{(2\pi)^{k/2} \sqrt{m_1! \dots m_k!}} z_1^{m_1} \dots z_k^{m_k} \right\}_{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k}$$

(respectivement $\left\{ u_{m_1 \dots m_k}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k) \right\}_{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k}$) (c.f. Remarque 10 du §II.2.).

Préliminaires

- i) Un état cohérent $\Psi_\alpha \in C_{\Psi_0, (1/\lambda)/4\pi k}^{\lambda}$ peut être développé dans la base $\{u_{m_1, \dots, m_k}\}_{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k}$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(z) &= \left(\pi'^{D_1}_\lambda \left(e^{\sqrt{2k/\lambda} \alpha a^+ + \sqrt{2k/\lambda} \bar{\alpha} a^-} \right) \Psi_0 \right)(z) \\ &= e^{-\frac{1}{2} \alpha \bar{\alpha}} e^{\sqrt{\frac{\lambda}{2k}} z \bar{\alpha}} \Psi_0 \left(z - \sqrt{\frac{2k}{\lambda}} \alpha \right) \\ &= \left(\frac{\lambda}{4\pi k} \right)^{k/2} e^{-\frac{1}{2} \alpha \bar{\alpha}} \sum_{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k} \prod_{j=1}^k \frac{(\bar{\alpha}_j)^{m_j}}{\sqrt{m_j!}} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2k}} \right)^{m_j} \frac{(z_j)^{m_j}}{\sqrt{m_j!}} \\ &= e^{-\frac{1}{2} \alpha \bar{\alpha}} \sum_{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k} \frac{(\bar{\alpha}_1)^{m_1} \dots (\bar{\alpha}_k)^{m_k}}{\sqrt{m_1! \dots m_k!}} u_{m_1, \dots, m_k}(z) \end{aligned}$$

D'où :

pour $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$

$$\Psi_\alpha(z) = e^{-\frac{1}{2} \alpha \bar{\alpha}} \sum_{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k} \frac{(\bar{\alpha}_1)^{m_1} \dots (\bar{\alpha}_k)^{m_k}}{\sqrt{m_1! \dots m_k!}} u_{m_1, \dots, m_k}(z)$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}^- - \{0\}$

$$\Psi_\alpha(\bar{z}) = e^{-\frac{1}{2} \alpha \bar{\alpha}} \sum_{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k} \frac{(\alpha_1)^{m_1} \dots (\alpha_k)^{m_k}}{\sqrt{m_1! \dots m_k!}} u_{m_1, \dots, m_k}(\bar{z})$$

(3.1)

- ii) Dans la notation de Dirac, l'espace $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ étant mis en correspondance avec l'espace des "bra" et l'espace $\mathcal{H}_\lambda^{D_2}$ avec l'espace des "ket", on peut définir

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_\alpha \in \mathcal{H}_\lambda^{D_1} \longleftrightarrow \langle \alpha | \\ u_{n_1, \dots, n_k} \in \mathcal{H}_\lambda^{D_1} \longleftrightarrow \langle n | \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_\alpha \in \mathcal{H}_\lambda^{D_2} \longleftrightarrow |\alpha\rangle \\ u_{n_1, \dots, n_k} \in \mathcal{H}_\lambda^{D_2} \longleftrightarrow |n\rangle \end{array} \right.$$

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{C}^k, \quad \forall n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$$

Les expressions (3.1) s'écrivent

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k | &= \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k} \left\{ \prod_{j=1}^k e^{-\frac{1}{2} |\alpha_j|^2} \frac{(\bar{\alpha}_j)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} \right\} \langle n_1, \dots, n_k | \\ | \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle &= \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k} \left\{ \prod_{j=1}^k e^{-\frac{1}{2} |\alpha_j|^2} \frac{(\alpha_j)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} \right\} | n_1, \dots, n_k \rangle \end{aligned} \quad (3.1')$$

qui sont exactement l'expression des états cohérents de Glauber, pour un système à k degrés de liberté, dans l'espace des "bra" et dans son dual respectivement (c.f. [K.S.] Ch. 7-3).

iii) Les opérateurs infinitésimaux de la représentation $\pi_\lambda^{D_r}$ de $H(2k+1)$, associés aux sous-groupes à un paramètre

$$\pi_\lambda^{D_r}(e^{z_j' a_j'}) = e^{\frac{i}{k} \sqrt{|\lambda|} z_j' \frac{P_\lambda^j - i Q_\lambda^j}{2}} \quad \text{et} \quad \pi_\lambda^{D_r}(e^{\bar{z}_j' a_j}) = e^{\frac{i}{k} \sqrt{|\lambda|} \bar{z}_j' \frac{P_\lambda^j + i Q_\lambda^j}{2}}$$

avec $t \in \mathbb{R}$, $z_j', \bar{z}_j' \in \mathbb{C}$, $j=1, 2, \dots, k$ nous fournissent les opérateurs

$$\begin{cases} \frac{P_\lambda^j - i Q_\lambda^j}{\sqrt{2k}} = i \sqrt{\frac{2k}{\lambda}} \frac{\partial}{\partial z_j'} & \text{et} \quad \frac{P_\lambda^j + i Q_\lambda^j}{\sqrt{2k}} = -i \sqrt{\frac{\lambda}{2k}} z_j', \quad j=1, 2, \dots, k, \quad \text{pour } r=1 \\ \frac{P_\lambda^j - i Q_\lambda^j}{\sqrt{2k}} = -i \sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \bar{z}_j' & \text{et} \quad \frac{P_\lambda^j + i Q_\lambda^j}{\sqrt{2k}} = i \sqrt{\frac{2k}{|\lambda|}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j'}, \quad j=1, 2, \dots, k, \quad \text{pour } r=2. \end{cases}$$

Définissant

$$\begin{cases} A_{\lambda_j}^* = i \frac{P_\lambda^j + i Q_\lambda^j}{\sqrt{2k}} & \text{et} \quad A_{\lambda_j} = (A_{\lambda_j}^*)^* = \frac{1}{i} \frac{P_\lambda^j - i Q_\lambda^j}{\sqrt{2k}} \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \\ A_{\lambda_j}^* = \frac{1}{i} \frac{P_\lambda^j - i Q_\lambda^j}{\sqrt{2k}} & \text{et} \quad A_{\lambda_j} = (A_{\lambda_j}^*)^* = i \frac{P_\lambda^j + i Q_\lambda^j}{\sqrt{2k}} \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}^- - \{0\} \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} A_{\lambda_j}^* = \sqrt{\frac{\lambda}{2k}} z_j', \quad A_{\lambda_j} = \sqrt{\frac{2k}{\lambda}} \frac{\partial}{\partial z_j'} & \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \\ A_{\lambda_j}^* = \sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \bar{z}_j', \quad A_{\lambda_j} = \sqrt{\frac{2k}{|\lambda|}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j'} & \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}^- - \{0\} \end{cases}$$

Ces opérateurs satisfont $[A_{\lambda_j}, A_{\lambda_j}^*] = Id_D$, $j=1,2,\dots,k$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$.

D'autre part on a

$$\begin{cases} P_{\lambda}^j = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{k}{2}} (A_{\lambda_j}^* - A_{\lambda_j}) \\ Q_{\lambda}^j = -\sqrt{\frac{k}{2}} (A_{\lambda_j}^* + A_{\lambda_j}) \end{cases} \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \text{ et } \begin{cases} P_{\lambda}^j = i \sqrt{\frac{k}{2}} (A_{\lambda_j}^* - A_{\lambda_j}) \\ Q_{\lambda}^j = \sqrt{\frac{k}{2}} (A_{\lambda_j}^* + A_{\lambda_j}) \end{cases} \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}^- - \{0\}$$

satisfaisant $[Q_{\lambda}^j, P_{\lambda}^j] = i\hbar Id_D$, $j=1,2,\dots,k$, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Ces opérateurs agissent de manière simple sur les éléments de base de $\mathcal{H}_{\lambda}^{D_r}$

- a) $A_{\lambda_j}^* u_{n_1, \dots, n_k} = \sqrt{n_j+1} u_{n_1, \dots, n_j+1, \dots, n_k}$
- b) $A_{\lambda_j} u_{n_1+1, \dots, n_k+1} = \sqrt{n_j+1} u_{n_1, \dots, n_j, \dots, n_k+1}$
- c) $A_{\lambda_j}^* A_{\lambda_j} u_{n_1, \dots, n_k} = n_j u_{n_1, \dots, n_k}$
- d) $u_{n_1, \dots, n_k} = \frac{(A_{\lambda_1}^*)^{n_1} \dots (A_{\lambda_k})^{n_k}}{\sqrt{n_1! \dots n_k!}} u_0$

quel que soit $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$.

On reconnaît a) l'opérateur de création, b) l'opérateur d'annihilation, c) l'opérateur nombre, d) les états de Fock avec $u_0, \dots$ comme état du vide, (habituellement écrits dans le formalisme de Dirac dans les cours de mécanique quantique) pour un oscillateur harmonique quantique à k dimensions.

N.B. Dans la remarque 10 du §II.2., des opérateurs analogues aux

$A_{\lambda_j}^*, A_{\lambda_j}$, $j=1,2,\dots,k$ ont été définis pour la représentation $\pi_{\lambda}^{D_r}$, $r=1,2$ de $U(2k+1)$. Le facteur $1/\sqrt{|\lambda|}$ apparaissant dans ces opérateurs est englobé ici dans le choix du sous-groupe à un paramètre, de manière à ce que $[Q_{\lambda}^j, P_{\lambda}^j] = i\hbar Id_D$, $j=1,2,\dots,k$, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Par les préliminaires i), ii) et iii), pour étudier les propriétés d'un système d'états cohérents généralisés $\subset_{\psi_0}^{\lambda} = (|\lambda|/4\pi k)^{k/4}$, il nous suffit de le faire pour un λ positif ou un λ négatif; nous choisissons le cas d'un λ négatif.

Soit $\Psi_\alpha \in C_{\Psi_0 = (|\lambda|/4\pi k)^{k/2}}^\lambda$, $\alpha \in \mathbb{C}^k$, $\lambda \in \mathbb{R}^- - \{0\}$

(P.1.)

L'état cohérent Ψ_α est fonction propre simultanée des opérateurs

A_{λ_j} , $j=1,2,\dots,k$, quel que soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{C}^k$.

$$A_{\lambda_j} |\alpha\rangle = \alpha_j |\alpha\rangle \quad ; \quad A_{\lambda_j} |0\rangle = 0 \quad (3.3)$$

Démonstration :

$$A_{\lambda_j} = \sqrt{\frac{2k}{|\lambda|}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \quad \text{et} \quad \Psi_\alpha(\bar{z}) = \left(\frac{|\lambda|}{4\pi k} \right)^{k/2} e^{-\frac{1}{2} \alpha \bar{\alpha}} e^{\sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \alpha \bar{z}} \quad \blacksquare$$

N.B. Les opérateurs $A_{\lambda_j}^*$, $j=1,2,\dots,k$ n'ont pas de fonctions propres non nulles.

(P.2.)

Expression de Ψ_α en fonction des opérateurs $A_{\lambda_j}^*$, A_{λ_j} , $j=1,2,\dots,k$

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha A_\lambda^* - \bar{\alpha} A_\lambda} |0\rangle \quad (3.4)$$

où

$$\alpha A_\lambda^* = \sum_{j=1}^k \alpha_j A_{\lambda_j}^* \quad , \quad \bar{\alpha} A_\lambda = \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_j A_{\lambda_j}$$

Démonstration :

Par définition, $\Psi_{\alpha}(\bar{z}) = e^{-\frac{1}{2}\alpha\bar{\alpha}} e^{\frac{\sqrt{|\lambda|}}{2k}\alpha\bar{z}} \Psi_0(\bar{z} - \frac{\sqrt{|\lambda|}}{2k}\bar{\alpha})$, $\Psi_0(\bar{z}) = (\lambda/4\pi k)^{k/2}$.

Or $e^{\frac{\sqrt{|\lambda|}}{2k}\alpha\bar{z}} \Psi_0(\bar{z} - \frac{\sqrt{|\lambda|}}{2k}\bar{\alpha}) = e^{\alpha A_{\lambda}^+} \Psi_0(\bar{z} - \frac{\sqrt{|\lambda|}}{2k}\bar{\alpha})$ et $\Psi_0(\bar{z} - \frac{\sqrt{|\lambda|}}{2k}\bar{\alpha}) = e^{-\bar{\alpha} A_{\lambda}} \Psi_0(\bar{z})$.

D'où $\Psi_{\alpha}(\bar{z}) = e^{-\frac{1}{2}\alpha\bar{\alpha}} e^{\alpha A_{\lambda}^+} e^{-\bar{\alpha} A_{\lambda}} \Psi_0(\bar{z})$; de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff (c.f. (7-24) de [K.S.]) on tire

$$e^{\alpha A_{\lambda}^+} e^{-\bar{\alpha} A_{\lambda}} = e^{\frac{1}{2}[\alpha A_{\lambda}^+, -\bar{\alpha} A_{\lambda}]} e^{\alpha A_{\lambda}^+ - \bar{\alpha} A_{\lambda}} \quad \text{et on conclut} \quad \blacksquare$$

(P.3.)

Action de la représentation $\pi'_{\lambda} D_{\lambda}$ sur l'état cohérent Ψ_{α}

$$e^{\beta A_{\lambda}^+ - \bar{\beta} A_{\lambda}} |\alpha\rangle = e^{i \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)} |\alpha + \beta\rangle \quad (3.5)$$

quel que soit $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^k$.

Démonstration :

$$\pi'_{\lambda} D_{\lambda} \left(e^{\sqrt{2k/|\lambda|} \beta \alpha^* + \sqrt{2k/|\lambda|} \bar{\beta} \alpha^-} \right) \Psi_{\alpha} = \pi'_{\lambda} D_{\lambda} \left(e^{\sqrt{2k/|\lambda|} \beta \alpha^* + \sqrt{2k/|\lambda|} \bar{\beta} \alpha^-} \right) \pi'_{\lambda} D_{\lambda} \left(e^{\sqrt{2k/|\lambda|} \alpha \alpha^* + \sqrt{2k/|\lambda|} \bar{\alpha} \alpha^-} \right) \Psi_0$$

par définition de Ψ_{α} et $\pi'_{\lambda} D_{\lambda} \Big|_{H(2k+1)/\mathbb{Z}}$ est une représentation à

multiplicateur, de multiplicateur

$$\exp \left(i \pi \lambda \theta \sigma_c \left(\sqrt{\frac{2k}{|\lambda|}} (\beta \alpha^* + \bar{\beta} \alpha^-), \sqrt{\frac{2k}{|\lambda|}} (\alpha \alpha^* + \bar{\alpha} \alpha^-) \right) \right) = \exp(i \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)) ;$$

$$\theta = \frac{1}{4\pi k} \text{ et } \lambda < 0 \quad \blacksquare$$

(P.4.)

Les états cohérents $\Psi_\alpha, \alpha \in \mathbb{C}^k$, sont normés mais non orthogonaux

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - 2\bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta})} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2 + i\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)} \quad (3.6)$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans l'espace des "ket" correspondant au produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ dans $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^k$.

Démonstration :

$(\Psi_\alpha, \Psi_\beta)$ se calcule en utilisant (3.1) et le fait que la base $\{u_{n_1}, \dots, u_{n_k}\}_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k}$ de $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ est orthonormée ■

N.B. La valeur absolue du produit scalaire (3.6) est donnée par

$|\langle \alpha | \beta \rangle| = e^{-|\alpha - \beta|^2/2}$; elle montre que les états cohérents tendent à devenir approximativement orthogonaux pour des valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^k$, qui sont suffisamment différentes.

(P.5.)

$\mathcal{C}_\lambda = \{(\lambda|/4\pi k)^{k/2} \Psi_\alpha\}$ est un système d'états cohérents de carré intégrable

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\alpha\alpha} &= (\Psi_\alpha, \pi_\lambda^{D_1}(e^{\sqrt{2k/|\lambda|}\beta a^+ + \sqrt{2k/|\lambda|}\bar{\beta} a^-})\Psi_\alpha) \\ &= (\Psi_\alpha, \Psi_\beta) \quad \text{par (P.3)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \in \mathcal{H}_\lambda^{D_1} \quad \text{par (P.4)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(P.6.)

Les coefficients de développement de l'état cohérent Ψ_α dans la base

$\{ |n_1, \dots, n_k\rangle \}_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k}$ sont donnés par

$$\langle n_1, \dots, n_k | \alpha \rangle = e^{-\frac{1}{2} \alpha \bar{\alpha}} \frac{(\alpha_1)^{n_1} \dots (\alpha_k)^{n_k}}{\sqrt{n_1!} \dots \sqrt{n_k!}} \quad (3.7)$$

Le nombre moyen d'occupation de l'état $u_{n_1, \dots, n_k}$ est donné par un produit de distributions de Poisson, d'espérances mathématiques $|\alpha_j|^2$, $j=1, 2, \dots, k$

$$|\langle n_1, \dots, n_k | \alpha \rangle|^2 = \prod_{j=1}^k \frac{|\alpha_j|^{2n_j}}{n_j!} e^{-|\alpha_j|^2} \quad (3.8)$$

Démonstration : Utiliser les préliminaires i) et ii) ■

(P.7.)

Les états cohérents Ψ_α sont des paquets d'ondes d'incertitude minimale. i.e. si on note $\langle C \rangle_\alpha = (\Psi_\alpha, C \Psi_\alpha)$ la valeur moyenne de l'opérateur C dans l'état Ψ_α , $(\cdot, \cdot)$ étant le produit scalaire dans $\mathcal{H}_\lambda^D$ et si $(\Delta C)_\alpha^2 = \langle C^2 \rangle_\alpha - \langle C \rangle_\alpha^2$ est la variance de l'opérateur C , on a

$$(\Delta P_\lambda^j)_\alpha (\Delta Q_\lambda^j)_\alpha = \frac{\hbar}{2} \quad \text{sur } D, \quad j=1, 2, \dots, k, \quad \text{quel que soit } \alpha \in \mathbb{C}^k \quad (3.9)$$

i.e. ce sont des états quantiques, qui sont le plus proche possible des états classiques.

Démonstration :

Du préliminaire iii) on a

$$P_{\lambda}^j = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} (A_{\lambda j}^+ - A_{\lambda j}) \quad , \quad Q_{\lambda}^j = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (A_{\lambda j}^+ + A_{\lambda j})$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$.

$$a) \quad (P_{\lambda}^j)^2 = -\frac{\hbar}{2} \left((A_{\lambda j}^+)^2 + A_{\lambda j}^2 - 2A_{\lambda j}^+ A_{\lambda j} - 1 \right)$$

$$\langle (P_{\lambda}^j)^2 \rangle_{\alpha} = \left(\Psi_{\alpha} , -\frac{\hbar}{2} \left((A_{\lambda j}^+)^2 + A_{\lambda j}^2 - 2A_{\lambda j}^+ A_{\lambda j} - 1 \right) \Psi_{\alpha} \right) = -\frac{\hbar}{2} \left((\alpha - \bar{\alpha})^2 - 1 \right)$$

on a utilisé (P.1.).

$$\langle P_{\lambda}^j \rangle_{\alpha}^2 = \left(\Psi_{\alpha} , i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} (A_{\lambda j}^+ - A_{\lambda j}) \Psi_{\alpha} \right)^2 = -\frac{\hbar}{2} (\alpha - \bar{\alpha})^2$$

$$\text{Finalement} \quad (\Delta P_{\lambda}^j)_{\alpha}^2 = \langle (P_{\lambda}^j)^2 \rangle_{\alpha} - \langle P_{\lambda}^j \rangle_{\alpha}^2 = \frac{\hbar}{2}$$

$$b) \text{ Idem avec } Q_{\lambda}^j ; \text{ on trouve } (\Delta Q_{\lambda}^j)_{\alpha}^2 = \frac{\hbar}{2} \quad \blacksquare$$

(P.8.)

Le produit scalaire d'une fonction quelconque $\Psi \in \mathcal{H}_{\lambda}^{D_0}$ et de l'état cohérent Ψ_{α} , revient à évaluer Ψ au point $\sqrt{2\hbar/|\lambda|} \bar{\alpha}$ et à multiplier le résultat par un facteur.

$$\langle \alpha | \Psi \rangle = e^{-\frac{1}{2} \alpha \bar{\alpha}} f(\bar{\alpha}) \quad \text{ou} \quad f(\bar{\alpha}) = \left(\frac{4\pi\hbar}{|\lambda|} \right)^{k/2} \Psi \left(\sqrt{\frac{2\hbar}{|\lambda|}} \bar{\alpha} \right) \quad (3.10)$$

Démonstration :

Montrons cette relation pour $\Psi(\bar{z}) = \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k} c_{n_1 \dots n_k} u_{n_1 \dots n_k}(\bar{z}) \in \mathcal{H}_{\lambda}^{D_0}$

$$(\Psi_{\alpha}, \Psi) = \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k} c_{n_1 \dots n_k} (\Psi_{\alpha}, u_{n_1 \dots n_k})$$

par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Utilisant (3.7) on a

$$(\Psi_{\alpha}, \Psi) = e^{-\frac{1}{2} \alpha \bar{\alpha}} \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k} c_{n_1 \dots n_k} \frac{(\bar{\alpha}_1)^{n_1} \dots (\bar{\alpha}_k)^{n_k}}{\sqrt{n_1! \dots n_k!}}$$

Posons

$$\begin{aligned} f(\bar{\alpha}) &= \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k} c_{n_1 \dots n_k} \frac{(\bar{\alpha}_1)^{n_1} \dots (\bar{\alpha}_k)^{n_k}}{\sqrt{n_1! \dots n_k!}} \\ &= \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k} (u_{n_1 \dots n_k}, \Psi) \frac{(\bar{\alpha}_1)^{n_1} \dots (\bar{\alpha}_k)^{n_k}}{\sqrt{n_1! \dots n_k!}} \end{aligned}$$

Or

$$u_{n_1 \dots n_k}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \left(\frac{|\lambda|}{2k} \right)^{\sum_{j=1}^k \frac{n_j+1}{2}} \frac{(\bar{z}_1)^{n_1} \dots (\bar{z}_k)^{n_k}}{\sqrt{n_1! \dots n_k!}}$$

d'où

$$u_{n_1 \dots n_k} \left(\sqrt{\frac{2k}{|\lambda|}} \bar{\alpha}_1, \dots, \sqrt{\frac{2k}{|\lambda|}} \bar{\alpha}_k \right) = \left(\frac{|\lambda|}{4\pi k} \right)^{k/2} \frac{(\bar{\alpha}_1)^{n_1} \dots (\bar{\alpha}_k)^{n_k}}{\sqrt{n_1! \dots n_k!}}$$

et

$$\begin{aligned} f(\bar{\alpha}) &= \left(\frac{4\pi k}{|\lambda|} \right)^{k/2} \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k} c_{n_1 \dots n_k} u_{n_1 \dots n_k} \left(\sqrt{\frac{2k}{|\lambda|}} \bar{\alpha}_1, \dots, \sqrt{\frac{2k}{|\lambda|}} \bar{\alpha}_k \right) \\ &= \left(\frac{4\pi k}{|\lambda|} \right)^{k/2} \Psi \left(\sqrt{\frac{2k}{|\lambda|}} \bar{\alpha} \right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

N.B. On remarque que pour Ψ et f liées par (3.10), la norme au carré de $\Psi \in \mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ vaut

$$(\Psi, \Psi) = \int_{\mathbb{C}^k} e^{-\frac{|\lambda|}{2k} z \bar{z}} |\Psi(\bar{z})|^2 d_z d_{\bar{z}} = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbb{C}^k} e^{-|\alpha|^2} |f(\bar{\alpha})|^2 d\alpha d\bar{\alpha} = (f, f)_{B-G}$$

où $(\cdot, \cdot)_{B-G}$ est exactement le produit scalaire utilisé par Glauber [Gl.1] et Bargmann [Bar.3].

(P.9.)

Le système d'états cohérents $\subset_{\Psi_0}^{\lambda} = (|\lambda|/4\pi\hbar)^{k/2}$ est total dans $\mathcal{H}_{\lambda}^{D_2}$ et l'on a une décomposition de l'opérateur identité.

$$\frac{1}{(n)^k} \int_{\mathbb{C}^k} |\alpha\rangle \langle \alpha| d^{2k}\alpha = Id \quad (3.11)$$

$$\text{où } d^{2k}\alpha = \prod_{j=1}^k d(\operatorname{Re}\alpha_j) d(\operatorname{Im}\alpha_j) \quad .$$

- Définition 3 : Une partie P d'un espace normé E est TOTALE si les combinaisons linéaires finies des éléments de P sont denses dans E .

Démonstration : Que le système d'états cohérents soit total provient de (P.3.) (i.e. l'invariance du sous-espace de $\mathcal{H}_{\lambda}^{D_2}$ engendré par les états cohérents, sous la représentation $\pi_{\lambda}^{D'_2}$) et de l'irréductibilité de $\pi_{\lambda}^{D'_2}$. Pour démontrer (3.11) on montre à l'aide de (3.10) que

$$(\Psi, \Psi') = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbb{C}^k} (\Psi, \Psi_{\alpha}) (\Psi_{\alpha}, \Psi') d\alpha d\bar{\alpha} \quad , \quad \Psi, \Psi' \in \mathcal{H}_{\lambda}^{D_2}$$

et on utilise que

$$\alpha_j = \operatorname{Re}\alpha_j + i\operatorname{Im}\alpha_j \quad , \quad d\alpha_j d\bar{\alpha}_j = 2d(\operatorname{Re}\alpha_j) d(\operatorname{Im}\alpha_j) \quad \blacksquare$$

(P.10.)

$$\begin{aligned}
 K(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \left(\frac{|\lambda|}{4\pi k} \right)^{k/2} e^{\frac{|\lambda|}{4k} \alpha \bar{\alpha}} \overline{\Psi_{\sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \alpha}(\bar{\beta})} \\
 &= \left(\frac{|\lambda|}{4\pi k} \right)^k e^{\frac{|\lambda|}{4k} (\alpha \bar{\alpha} + \beta \bar{\beta})} \left\langle \sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \beta \middle| \sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \alpha \right\rangle \\
 &= \left(\frac{|\lambda|}{4\pi k} \right)^k e^{\frac{|\lambda|}{4k} \alpha \bar{\beta}} \\
 &= \left(\frac{|\lambda|}{4\pi k} \right)^{k/2} e^{\frac{|\lambda|}{4k} \beta \bar{\beta}} \Psi_{\sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \beta}(\bar{\alpha}) = \overline{K(\bar{\beta}, \bar{\alpha})} \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

est le noyau reproduisant de $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$; $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{C}^k$.

Démonstration :

$K(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ est un noyau reproduisant de $\mathcal{H}_\lambda^{D_2}$ car

- 1) Pour chaque $\bar{\beta}, K(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ en tant que fonction de $\bar{\alpha}$, appartient à $\mathcal{H}_\lambda^{D_2}$.
- 2) Pour toute fonction $\Psi \in \mathcal{H}_\lambda^{D_2}$, $K(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ reproduit cette fonction, i.e.

$$\Psi(\bar{\alpha}) = \int_{\mathbb{C}^k} e^{-\frac{|\lambda|}{2k} \beta \bar{\beta}} K(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \Psi(\bar{\beta}) d\beta d\bar{\beta} = \langle K(\bar{\alpha}, \cdot), \Psi \rangle \quad (3.13)$$

où $(\cdot, \cdot)$ = produit scalaire dans $\mathcal{H}_\lambda^{D_2}$.

Cela provient de (3.10)

$$\langle \alpha | \Psi \rangle = \left(\frac{|\lambda|}{4\pi k} \right)^{k/2} e^{-\frac{1}{4} \alpha \bar{\alpha}} \Psi \left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \bar{\alpha} \right)$$

avec le produit scalaire écrit explicitement.

Pour démontrer les autres formes de $K(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ apparaissant dans (3.12), on utilise (3.10).

$$\begin{aligned}
 K(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \left(\frac{|\lambda|}{4\pi k} \right)^{k/2} e^{\frac{|\lambda|}{4k} \alpha \bar{\alpha}} \overline{\Psi_{\sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \alpha}(\bar{\beta})} = \left(\frac{|\lambda|}{4\pi k} \right)^{k/2} e^{\frac{|\lambda|}{4k} (\alpha \bar{\alpha} + \beta \bar{\beta})} \left\langle \sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \beta \middle| \sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \alpha \right\rangle \\
 &= \left(\frac{|\lambda|}{4\pi k} \right)^k e^{\frac{|\lambda|}{4k} (\alpha \bar{\alpha} + \beta \bar{\beta})} \left\langle \sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \alpha \middle| \sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \beta \right\rangle = \left(\frac{|\lambda|}{4\pi k} \right)^{k/2} e^{\frac{|\lambda|}{4k} \beta \bar{\beta}} \Psi_{\sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \beta}(\bar{\alpha}) \\
 &= \overline{K(\bar{\beta}, \bar{\alpha})} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

(P.11.)

Une fonction quelconque $\Psi \in \mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ se développe de la manière suivante dans les états cohérents $\Psi_\alpha \in C_{\Psi_0 = (|\lambda|/4\pi k)^{h/2}}^\lambda$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{(\pi)^k} \int_{\mathbb{C}^k} \langle \alpha | \Psi \rangle |\alpha\rangle d^{2k}\alpha \quad (3.14)$$

Démonstration :

Utiliser (3.11) ou partir de (3.13)

$$\Psi(\bar{z}) = \int_{\mathbb{C}^k} e^{-\frac{|\lambda|}{2k} \alpha \bar{\alpha}} K(\bar{z}, \bar{\alpha}) \Psi(\bar{\alpha}) d\alpha d\bar{\alpha}$$

introduire

$$\Psi(\bar{\alpha}) = \left(\frac{|\lambda|}{4\pi k}\right)^{k/2} e^{\frac{|\lambda|}{4k} \alpha \bar{\alpha}} \langle \sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \alpha | \Psi \rangle$$

donné par (3.10), ainsi que

$$K(\bar{z}, \bar{\alpha}) = \left(\frac{|\lambda|}{4\pi k}\right)^{k/2} e^{\frac{|\lambda|}{4k} \alpha \bar{\alpha}} \Psi_{\sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \alpha}(\bar{z})$$

donné par (3.12).

D'où

$$\begin{aligned} \Psi(\bar{z}) &= \left(\frac{|\lambda|}{4\pi k}\right)^k \int_{\mathbb{C}^k} \langle \sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \alpha | \Psi \rangle \Psi_{\sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \alpha}(\bar{z}) d\alpha d\bar{\alpha} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbb{C}^k} \langle \alpha | \Psi \rangle \Psi_\alpha(\bar{z}) d\alpha d\bar{\alpha} \\ &= \frac{1}{(\pi)^k} \int_{\mathbb{C}^k} \langle \alpha | \Psi \rangle \Psi_\alpha(\bar{z}) d^{2k}\alpha \end{aligned}$$

N.B. Lorsque Ψ est un état cohérent, l'expression (3.14) nous donne une dépendance linéaire entre les états cohérents appartenant à $C_{\Psi_0}^{\lambda} = (|\lambda|/4\pi k)^{k/2}$. Nous verrons plus loin, dans le cas particulier du groupe de Heisenberg de dimension trois, $H(3)$, comment extraire un sous-système de $C_{\Psi_0}^{\lambda} = (|\lambda|/4\pi k)^{k/2}$ qui soit total minimal dans $\mathcal{H}_{\lambda}^{D_0}$ l'espace de la représentation de type "B.F.S." de $H(3)$.

(P.12.)

Expression des états cohérents appartenant à $C_{\Psi_0}^{\lambda} = (|\lambda|/4\pi k)^{k/2}$ dans les représentations $(\pi'_{\lambda_0}{}^A, L^2(\mathbb{R}^k))$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ (représentation de type position de $H(2k+1)$ induite à gauche) et $(\pi'_{mF}{}^C, \mathcal{H}_{mF}^C)$ (représentation de type "réseau" de $H(2k+1)$ induite à gauche) ce dernier cas seulement lorsque $\lambda = m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ (voir §II.2.).

$$\begin{aligned} \Psi_{\sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}}} \alpha &= \pi'_{\lambda_0}{}^A (e^{a\alpha^* + \bar{a}\alpha}) \Psi_0 \in \mathcal{H}_{\lambda}^{D_0} \\ \phi_{(q,p)} &= \pi'_{\lambda_0}{}^A (e^{iq^* + p^p}) \phi_0 \in L^2(\mathbb{R}^k) \\ \psi_{(q,p)} &= \pi'_{mF}{}^C (e^{iq^* + p^p}) \psi_0 \in \mathcal{H}_{mF}^C \end{aligned} \quad (3.15)$$

où $\alpha = q + ip \in \mathbb{C}^k$, $q, p \in \mathbb{R}^k$

$$\begin{aligned} \Psi_0(\bar{z}) &= \left(\frac{|\lambda|}{4\pi k} \right)^{k/2} \\ \phi_0(x) &= \left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\pi k}} \right)^k e^{-\frac{|\lambda|}{2k} x^2} \\ \psi_0(x, y) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \right)^k e^{i \frac{m}{2k} y(x-a)} \sum_{s \in \mathbb{Z}^k} e^{-i \frac{m}{k} y s} e^{i \pi F(s) e} \phi_0(x-s-a) \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec $\begin{cases} a \in \mathbb{R}^k \text{ nul pour } m \text{ pair et nul si } F = F' \text{ pour } m \text{ impair.} \\ a = (\frac{1}{2}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k \text{ pour } m \text{ impair avec } F = F''. \end{cases}$

(P.12.) (suite)

Dans (3.15) on passe de $\Psi_{\sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}}\alpha} \in \mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ à $\phi_{(q,p)} \in L^2(\mathbb{R}^k)$ et à $\Psi_{(q,p)} \in \mathcal{H}_{mF}^C$ par les opérateurs d'entrelacement adéquats, construits au §II.3.

Les expressions (3.15) sont équivalentes à

$$\begin{aligned} \Psi_{\sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}}\alpha}(\bar{z}) &= e^{-\frac{|\lambda|}{4k}\alpha\bar{\alpha}} e^{\frac{|\lambda|}{2k}\alpha\bar{z}} \Psi_0(\bar{z}-\bar{\alpha}) \in \mathcal{H}_\lambda^{D_1} \\ \phi_{(q,p)}(x) &= e^{-i\frac{|\lambda|}{2k}pq} e^{i\frac{|\lambda|}{k}xp} \phi_0(x-q) \in L^2(\mathbb{R}^k) \\ \Psi_{(q,p)}(x,y) &= e^{-i\frac{\sqrt{m}}{2k}(qy-xp)} \Psi_0(x-q, y-p) \in \mathcal{H}_{mF}^C \end{aligned} \quad (3.15')$$

où $\bar{z} \in \mathbb{C}^k$, $\alpha = q + ip \in \mathbb{C}^k$, $q, p \in \mathbb{R}^k$, $x, y \in \mathbb{R}^k$ et Ψ_0, ϕ_0, Ψ_0 sont donnés par (3.16).

Les expressions (3.15) et (3.15') sont aussi équivalentes à

$$\begin{aligned} \Psi_{\sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}}\alpha} &= e^{\sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}}\alpha A_\lambda^* - \sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}}\bar{\alpha} A_\lambda} \Psi_0 \in \mathcal{H}_\lambda^{D_1} \\ \phi_{(q,p)} &= e^{i\frac{\sqrt{|\lambda|}}{k}pQ_{\lambda_0} - i\frac{\sqrt{|\lambda|}}{k}qP_{\lambda_0}} \phi_0 \in L^2(\mathbb{R}^k) \\ \Psi_{(q,p)} &= e^{i\frac{\sqrt{m}}{k}pQ_m - i\frac{\sqrt{m}}{k}qP_m} \Psi_0 \in \mathcal{H}_{mF}^C \end{aligned} \quad (3.15'')$$

où $xB = \sum_{j=1}^k x_j B_j$ par convention;

$$\alpha = q + ip \in \mathbb{C}^k, q, p \in \mathbb{R}^k;$$

Ψ_0, ϕ_0, Ψ_0 sont donnés par (3.16); et où, pour $j=1, 2, \dots, k$

$$A_{\lambda_j}^* = \sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \bar{z}_j, \quad A_{\lambda_j} = \sqrt{\frac{2k}{|\lambda|}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

$$Q_{\lambda_0}^j = \sqrt{|\lambda|} x_j, \quad P_{\lambda_0}^j = \frac{k}{i\sqrt{|\lambda|}} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$Q_m^j = \frac{\sqrt{m}}{2} x_j - \frac{k}{i\sqrt{m}} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad P_m^j = \frac{\sqrt{m}}{2} y_j + \frac{k}{i\sqrt{m}} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Démonstration : Exprimer le système d'états cohérents $C_{\Psi_0 = (|\lambda|/4\pi k)^{h/2}}$ dans les représentations $(\pi'_{\lambda_0}{}^A, L^1(\mathbb{R}^h))$, $\lambda \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$ et $(\pi'_{mF}{}^C, \mathcal{H}_{mF}^C)$ seulement lorsque $\lambda = m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{0\}$, revient à expliciter les systèmes d'états cohérents généralisés de $H(2kh+1)$ de type $(\pi'_{\lambda_0}{}^A, \phi_0)$ et de type $(\pi'_{mF}{}^C, \psi_0)$ respectivement, où $\phi_0 \in L^1(\mathbb{R}^h)$, $\psi_0 \in \mathcal{H}_{mF}^C$, sont les images de $\Psi_0 \in \mathcal{H}_{\lambda}^{D_1}$ par les opérateurs d'entrelacement entre les représentations $(\pi'_{\lambda}{}^{D_1}, \mathcal{H}_{\lambda}^{D_1})$ et $(\pi'_{\lambda_0}{}^A, L^1(\mathbb{R}^h))$, $\lambda \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$ et entre les représentations $(\pi'_{\lambda}{}^{D_1}, \mathcal{H}_{\lambda}^{D_1})$ et $(\pi'_{mF}{}^C, \mathcal{H}_{mF}^C)$ respectivement, ce dernier cas seulement lorsque $\lambda = m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{0\}$ (utiliser la proposition 6 2 et la proposition 3, ainsi que la proposition 8 2 et la proposition 3 du §II.3). Les opérateurs $A_{\lambda_j}^*$, A_{λ_j} , $\lambda \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$ sont donnés dans le préliminaire iii); $Q_{\lambda_0}^j$, $P_{\lambda_0}^j$ sont les opérateurs infinitésimaux de la représentation $\pi'_{\lambda_0}{}^A$ liés aux sous-groupes à un paramètre $\pi'_{\lambda_0}{}^A(e^{x_j^i} e^{t_j}) = e^{\frac{i x_j^i}{\kappa}} t_j^i Q_{\lambda_0}^j$ et $\pi'_{\lambda_0}{}^A(e^{x_j^i} e^{t_j}) = e^{-\frac{i \sqrt{|\lambda|}}{\kappa} x_j^i} P_{\lambda_0}^j$ respectivement avec $x_j^i, t_j^i \in \mathbb{R}$, $j=1,2,\dots,k$. On remarquera que $Q_{\lambda_0}^j = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (A_{\lambda_j}^* + A_{\lambda_j})$ et $P_{\lambda_0}^j = i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (A_{\lambda_j}^* - A_{\lambda_j})$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$. (Préliminaire iii).) Finalement Q_m^j , P_m^j sont les opérateurs infinitésimaux de la représentation $\pi'_{mF}{}^C$ liés aux sous-groupes à un paramètre $\pi'_{mF}{}^C(e^{x_j^i} e^{t_j}) = e^{\frac{i \sqrt{|m|}}{\kappa} t_j^i} Q_m^j$ et $\pi'_{mF}{}^C(e^{x_j^i} e^{t_j}) = e^{-\frac{i \sqrt{|m|}}{\kappa} x_j^i} P_m^j$ respectivement; $x_j^i, t_j^i \in \mathbb{R}$, $j=1,2,\dots,k$; $m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{0\}$ ■

N.B. Lorsque le point $q \in \rho^0$ appartient au réseau $L = \{r e + 2\pi \hbar s \rho^0, r, s \in \mathbb{Z}^h\}$ de $\mathbb{R}^{2h}$, utilisé dans la construction de la représentation $(\pi'_{mF}{}^C, \mathcal{H}_{mF}^C)$, l'état cohérent $\Psi_{(q,p)}$ correspondant a une forme extrêmement simple (utiliser (3.15') et la quasi périodicité de $\Psi_{(r, 2\pi \hbar s)}$ sur L), à savoir

$$\Psi_{(r, 2\pi \hbar s)}(x, y) = e^{-\frac{i \sqrt{|m|}}{\kappa} r y} e^{2i\pi i m s x} e^{2i\pi F(r e + 2\pi \hbar s \rho^0)} \Psi_0(x, y)$$

où $r, s \in \mathbb{Z}^h$.

(P.13.)

Cette dernière propriété, que nous formulerons comme proposition, est énoncée et démontrée pour un système d'états cohérents généralisés du groupe de Heisenberg $|\mathbb{H}(\lambda k+i)$ pour $\boxed{k=1}$.

Soit $L = \{r e + i 2\pi k s f; r, s \in \mathbb{Z}\}$ un réseau principal de $(\mathbb{R}^2, \frac{1}{4\pi k} \sigma_*)$. La surface de la cellule élémentaire $C = [0, 1[\times [0, 2\pi k[$ de L vaut $2\pi k = h$, la constante de Planck.

- Définition 4 : Un réseau de l'espace de phase $\mathbb{R}^2$, correspondant à la division de $\mathbb{R}^2$ en "cellules de Planck" (i.e. : de surface h) est appelé RESEAU de VON NEUMANN.

Proposition 4

Soit $L = \{l = r e + i 2\pi k s f; r, s \in \mathbb{Z}\}$ un réseau de von Neumann de $\mathbb{R}^2$ et $C_{\Psi_0}^\lambda = \sqrt{|\lambda|/4\pi k}$ le système d'états cohérents de type $(\pi_\lambda^{D_1}, \Psi_0)$ de $|\mathbb{H}(3)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Le sous-système discret d'états cohérents $\{\Psi_{\frac{|\lambda|}{2k}} \alpha_l; l \in L\}$ de $C_{\Psi_0}^\lambda = \sqrt{|\lambda|/4\pi k}$ est total dans $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$. Il est total minimal par suppression d'un état cohérent $\Psi_{\frac{|\lambda|}{2k}} \alpha_{l'}$, $l' \in L$ quelconque fixé, et n'est plus total si on en enlève plus d'un.

N.B. Pour $l = r e + i 2\pi k s f \in L$, on note $\alpha_l = r + i 2\pi k s \in \mathbb{C}$. On remarque qu'au réseau de von Neumann L , ayant une cellule élémentaire de surface $2\pi k$, on fait correspondre le système d'états cohérents $\Psi_{\frac{|\lambda|}{2k}} \alpha_l$ qui sont indicés par les sites d'un réseau du plan complexe $\sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} \alpha_l$, $l \in L$, ayant une cellule élémentaire de surface $\sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} 1 \cdot \sqrt{\frac{|\lambda|}{2k}} 2\pi k = |\lambda| \pi$.

Démonstration : Il nous suffit de démontrer la proposition 4 pour un λ particulier; nous choisissons $\lambda = -1$ et nous nous plaçons dans la représentation de type réseau $(\pi_{-1F}^C, \mathcal{H}_{-1F}^C)$ de $H(3)$. Au système discret d'états cohérents $\{\psi_{\frac{r}{2k}}^D; r \in \mathbb{Z}\}$ dans $\mathcal{H}_{-1}^D$ correspond le système $\{\varphi_{r,s} = \varphi_{(r, 2\pi k s)}; r, s \in \mathbb{Z}\}$ dans $\mathcal{H}_{-1F}^C$.

i) Montrons que le système $\{\varphi_{r,s}; r, s \in \mathbb{Z}\}$ est total dans $\mathcal{H}_{-1F}^C$

Dire qu'une partie $P = \{\varphi_j; j \in I\}$ d'un espace de Hilbert E est totale est équivalent à " $(\varphi_j, q) = 0, q \in E, \forall j \in I \implies q = 0$ ".

Supposons que φ soit une fonction de $\mathcal{H}_{-1F}^C$, orthogonale à tous les $\varphi_{r,s}, r, s \in \mathbb{Z}$, i.e. $(\varphi_{r,s}, \varphi) = 0, \forall r, s \in \mathbb{Z}$.

Utilisant $\varphi_{r,s}(x, y) = e^{-\frac{i}{k}ry} e^{2i\pi sx} e^{i\pi rs} \varphi_0(x, y)$, on a

$$\int_{[0,1[} dx \int_{[0, 2\pi k[} dy e^{\frac{i}{k}ry} e^{-2i\pi sx} \overline{\varphi_0(x, y)} \varphi(x, y) = 0, \quad \forall r, s \in \mathbb{Z} \quad (3.17)$$

φ_0 et φ sont quasi périodiques sur le réseau L ; la fonction produit $\overline{\varphi_0} \varphi$ est, elle, périodique sur L . L'équation (3.17) nous indique que tous les coefficients de Fourier de la fonction $\overline{\varphi_0} \varphi$ sont nuls $\implies \overline{\varphi_0(x, y)} \varphi(x, y) = 0$ p.p.; φ_0 donnée par (3.16), dans le cas $k=1$, est liée à une fonction thêta de Jacobi (voir §III.1.2))

$$\varphi_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \sqrt{\frac{1}{\pi k}} e^{-\frac{i}{2k}xy} e^{-\frac{1}{2k}x^2} \Theta_3\left(\frac{1}{2k}(y - ix) \middle| \frac{i}{2\pi k}\right) \quad (3.18)$$

La fonction thêta trois Θ_3 ne possède qu'un seul zéro dans la cellule élémentaire de L , à savoir $(x, y) = (\frac{1}{2}, \pi k)$.

Donc φ_0 ne s'annule qu'une fois dans $C \implies \varphi(x, y) = 0$ p.p. C.Q.F.D.

ii) Montrons que le système $\{\varphi_{r,s}; r,s \in \mathbb{Z}, r \neq r_1, s \neq s_1, \text{ où } r_1, s_1 \text{ sont deux entiers q.c.q. fixés}\}$ est total dans $\mathcal{H}_{-1F}^C$

Supposons que φ soit une fonction de $\mathcal{H}_{-1F}^C$, orthogonale à tous les $\varphi_{r,s}, r,s \in \mathbb{Z}, r \neq r_1, s \neq s_1$. On a

$$\int dx \int dy e^{\frac{i}{k}ry} e^{-2i\pi sx} \overline{\varphi_0(x,y)} \varphi(x,y) = 0, \forall r,s \in \mathbb{Z}, r \neq r_1, s \neq s_1 \quad (3.17')$$

[0,1[[0,2\pi k[

$\Rightarrow$ tous les coefficients de Fourier de $\overline{\varphi_0} \varphi$ sont nuls sauf un, notons-le $c_{r_1 s_1}$. Nous avons

$$\overline{\varphi_0(x,y)} \varphi(x,y) = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} c_{r,s} e^{2i\pi sx} e^{-\frac{i}{k}ry} = c_{r_1 s_1} e^{2i\pi s_1 x} e^{-\frac{i}{k}r_1 y}.$$

Ainsi la fonction

$$\varphi(x,y) = \frac{c_{r_1 s_1} e^{2i\pi s_1 x} e^{-\frac{i}{k}r_1 y}}{\varphi_0(x,y)} \quad (3.19)$$

est orthogonale à tous les $\varphi_{r,s}, r,s \in \mathbb{Z}$ et $r \neq r_1, s \neq s_1$. Or, cette fonction appartient à $\mathcal{H}_{-1F}^C$, seulement si $c_{r_1 s_1} = 0$ (car φ est quasi périodique sur le réseau $\mathbb{L}$, mais n'est pas de carré intégrable sur la cellule C , sauf si $c_{r_1 s_1} = 0$, à cause du zéro de φ_0).

iii) Montrons que le système $\{\varphi_{r,s}; r,s \in \mathbb{Z}, r \neq r_1, r_2, s \neq s_1, s_2, \text{ où } r_1, r_2, s_1, s_2 \text{ sont des entiers q.c.q. fixés}\}$ n'est pas total dans $\mathcal{H}_{-1F}^C$

Supposons que φ soit une fonction de $\mathcal{H}_{-1F}^C$, orthogonale à tous les $\varphi_{r,s}, r,s \in \mathbb{Z}, r \neq r_1, r_2, s \neq s_1, s_2$. Par analogie aux cas i) et ii) on obtient que tous les coefficients de Fourier de $\overline{\varphi_0} \varphi$ sont nuls sauf deux, que l'on note $c_{r_1 s_1}, c_{r_2 s_2}$.

D'où

$$\varphi(x, y) = \frac{c_{r_1 s_1} e^{2i\pi s_1 x} e^{-\frac{i}{k} r_1 y} + c_{r_2 s_2} e^{2i\pi s_2 x} e^{-\frac{i}{k} r_2 y}}{\varphi_0(x, y)}$$

On choisit $c_{r_1 s_1}$ t.q. φ n'ait pas de pôle en $(x, y) = (\frac{1}{2}, \pi k)$, i.e. on annule le numérateur en $(\frac{1}{2}, \pi k)$ et on choisit $c_{r_2 s_2}$ t.q. $(\varphi, \varphi_{r_2 s_2}) = 1$.
On obtient

$$\varphi(x, y) = \frac{(-1)^{r_1 s_1}}{2\pi k} \cdot \frac{e^{2i\pi s_1 x} e^{-\frac{i}{k} r_1 y} - (-1)^{s_2 - r_2}}{\varphi_0(x, y)} \quad (3.20)$$

La fonction donnée par (3.20) est orthogonale à tous les $\varphi_{r,s}$, $r, s \in \mathbb{Z}$, $r \neq r_1, r_2$, $s \neq s_1, s_2$, elle est non nulle et appartient à $\mathcal{H}_{-1F}^C$.

iv) Par ii) et iii) on conclut que le système $\{\varphi_{r,s}; r, s \in \mathbb{Z}, r \neq r_1, s \neq s_2\}$ ($r_1, s_1 \in \mathbb{Z}$ q.c.q. mais fixés) est total minimal dans $\mathcal{H}_{-1F}^C$. ■

Remarque 2 : Le choix de $\lambda = -1$ et de $(\pi_{-1F}^C, \mathcal{H}_{-1F}^C)$ pour démontrer la proposition 4 repose sur le fait suivant. L'espace $\mathcal{H}_{-1F}^C$ coïncide avec l'espace des fonctions de la représentation k_q^q de Zak pour q donné par $\eta(y, x) = -\frac{1}{2k}xy, x, y \in \mathbb{R}$ (voir §II.4. point d) et Prop. 9(8)) et c'est dans cette représentation que ce résultat a été démontré de la manière la plus simple ([B.G.Z.1] et discussions avec J. Zak. Pour d'autres démonstrations voir [Pe.] et [B.B.G.K.]; [B B G K.] ne parle pas du sous-système total minimal).

Remarque 3 : La définition 4 doit nous rappeler que c'est von Neumann [von N.2, p. 407] le premier qui a annoncé, sans démonstration, la totalité du système $\{\phi_{r,s}; r, s \in \mathbb{Z}\}$ où $\phi_{r,s}$ est l'état correspondant à $\Psi_{\frac{r+s}{2k}}^{\text{ON}} \alpha_\ell$, $\ell = re + 2\pi k s f$, dans la représentation de type position de $\mathcal{H}(3)$.

Remarque 4 : Si on considère un état cohérent par site d'un réseau dans l'espace de phase $\mathbb{R}^2$ ayant une cellule élémentaire de surface plus grande que $2\pi\hbar$ (respectivement plus petite que $2\pi\hbar$), alors l'ensemble d'états considérés n'est pas total (respectivement est total non minimal) dans $\mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ (voir [Pe.1] et [B.B.G.K.]).

Remarque 5 : Un résultat analogue à celui de la proposition 4 pour un groupe de Heisenberg de dimension $2k+1, k > 1$, fait défaut (voir [Pe.3] p. 299). En tout cas, la démonstration de la proposition 4 ne se généralise pas, car on ne connaît pas encore suffisamment de renseignements sur les zéros des fonctions thêta multidimensionnelles.

CONCLUSION : Les propriétés des états cohérents de Glauber que nous venons d'examiner, utiles dans les applications, ne sont pas toutes des propriétés d'un système d'états cohérents généralisés d'un groupe de Lie quelconque, comme nous avons pu nous en rendre compte à propos de (P.13).

Bien que non démontrée pour un groupe de Heisenberg de dimension plus grande que trois, la proposition 4 de (P.13) telle quelle est précieuse, car on peut se poser la question :

(Q.4) Etant donnée la représentation de type B.F.S. $(\pi_\lambda^{D_1}, \mathcal{H}_\lambda^{D_1})$ de $H(3)$ est-il possible de développer un état quelconque $\psi \in \mathcal{H}_\lambda^{D_1}$ en termes des états cohérents $\psi_{\frac{\sqrt{1\lambda}}{ik}} \alpha_\ell$, $\ell \in \mathbb{Z} - \{\ell'\}$ de type $(\pi_\lambda^{D_1}, \psi_0 = \sqrt{\frac{1\lambda}{4\pi\hbar}})$ de $H(3)$? [Pe.1] et [B.Z.].

- Définition 5 : Soit E un espace de Banach, E^* son dual. Une paire de systèmes $(\{x_n\}, \{f_n\})$ où $\{x_n\} \subset E$, $\{f_n\} \subset E^*$ est appelé SYSTEME BIORTHOGONAL si $f_j(x_\ell) = \delta_{j\ell}$, $j, \ell = 1, 2, \dots$. Le système biorthogonal est dit E -total si le système $\{x_n\}$ est total dans E .

- Définition 6 : Soit E un espace de Banach et $(\{x_n\}, \{f_n\})$ un système biorthogonal. Pour chaque $x \in E$, la série (convergente ou divergente) $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) x_j$ est appelée le DEVELOPPEMENT FORMEL de x CORRESPONDANT au SYSTEME BIORTHOGONAL $(\{x_n\}, \{f_n\})$. On note $x \sim \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) x_j$.

- . Définissant $\tilde{\varphi}_{\alpha_{l_1}} = \varphi$ donnée par (3.20) et $\tilde{\varphi}_{\frac{1}{\sqrt{k}} \alpha_{l_1}}$ la fonction correspondante dans la représentation B.F.S., on peut montrer que la paire de systèmes $(\{\varphi_{\frac{1}{\sqrt{k}} \alpha_{l_1}}\}, \{\tilde{\varphi}_{\frac{1}{\sqrt{k}} \alpha_{l_1}}\})$, $l \in L - \{l'\}$ où l' est un vecteur q.c.q. de L fixé, est un système biorthogonal (i.e. $(\tilde{\varphi}_{\frac{1}{\sqrt{k}} \alpha_{l_a}}, \varphi_{\frac{1}{\sqrt{k}} \alpha_{l_b}}) = \delta_{l_a l_b}$, $l_a, l_b \in L - \{l'\}$) $\mathcal{H}_\lambda^{D_2}$ -total.

- . Quant au développement formel $\Psi \sim \sum_{l \in L - \{l'\}} (\tilde{\varphi}_{\frac{1}{\sqrt{k}} \alpha_{l_1}}, \Psi) \varphi_{\frac{1}{\sqrt{k}} \alpha_{l_1}}$ d'une fonction $\Psi \in \mathcal{H}_\lambda^{D_2}$, on peut l'interpréter dans un espace de distributions (tempérées); la recherche d'une solution générale pour les coefficients c_l de $\Psi \sim \sum_{l \in L - \{l'\}} c_l \varphi_{\alpha_{l_1}}$ conduit au fait que les c_l ne sont pas déterminés d'une manière unique, mais qu'on peut les choisir de manière canonique [B.Z.].

- . Par comparaison avec le point de vue introduit tout à fait indépendamment et pour d'autres raisons par [A.T.], exposé au §III.1, on peut se demander si pour un groupe de Lie différent d'un groupe de Heisenberg de dimension trois, la construction d'un système d'états cohérents généralisés peut fournir un bon système total pour l'analyse harmonique sur une variété liée à ce groupe.

§III.3. LES SYMETRIES DE TRANSLATION DE L'HAMILTONIEN D'UN ELECTRON DE BLOCH SOUMIS A UN CHAMP MAGNETIQUE CONSTANT

En physique du solide, le système d'un électron de Bloch soumis à un champ magnétique extérieur constant est, aujourd'hui encore, un modèle de base. Pour trouver des propriétés générales des valeurs propres et fonctions propres de l'hamiltonien de ce système, il y a plusieurs méthodes. Une approche du problème consiste à tirer parti des symétries de translation du système.

§III.3.1. Groupe et algèbre de symétrie de translation de l'hamiltonien d'un électron soumis à un champ magnétique constant

Nous allons considérer l'hamiltonien H_0 d'un électron soumis à un champ magnétique constant et chercher le groupe de symétrie de translation de cet opérateur [O.T.]. Ce faisant, nous utilisons la théorie du relèvement des représentations boréliennes unitaires à multiplicateurs exposée au §I.2. point B, des résultats de laquelle il découle que pour des jauges différentes et quel que soit le champ magnétique constant, on obtient des groupes de symétrie isomorphes.

Une manière d'identifier le groupe de symétrie d'un opérateur autoadjoint avec "quelque chose" qui possède une signification physique consiste à examiner ses générateurs. C'est pour cette raison que nous nous intéressons à l'algèbre de symétrie de H_0 (voir Prop. 9 §I.5.). Se plaçant dans la représentation du groupe de symétrie de translation de l'hamiltonien H_0 fournissant les opérateurs qui laissent H_0 invariant, nous allons déterminer les générateurs infinitésimaux de cette représentation et essayer de les interpréter physiquement.

Soit

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left(p + \frac{e}{c} A \right)^2 \quad (3.21)$$

l'hamiltonien d'un électron dans l'espace $\mathbb{R}^3$ soumis à un champ magnétique constant $B = \text{rot} A(r) = \text{constante}$, $r \in \mathbb{R}^3$. Avec $p = \frac{\hbar}{i} \nabla$; $m, e, c, \hbar$ sont respectivement la masse de l'électron, la valeur absolue de la charge de l'électron, la vitesse de la lumière et la constante de Planck divisée par 2π .

(Hyp. 1) On suppose que chaque composante de A est une fonction dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ à valeurs réelles.

Proposition 5

Soient :

H_0 l'hamiltonien donné par (3.21) avec le potentiel vecteur A satisfaisant (Hyp. 1)

$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ l'espace des fonctions infiniment différentiables à support compact contenu dans $\mathbb{R}^3$.

Alors : H_0 est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Démonstration : Voir Th. X.22 de la réf. [R.S.] ■

Recherche d'un groupe de symétrie de H_0

Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ t.q. e_3 soit perpendiculaire à e_1 et à e_2 et de norme 1, $V = \{v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3; v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \text{ ; muni de l'addition} \}$ le groupe des translations dans l'espace $\mathbb{R}^3$, muni de la topologie canonique.

Nous ne nous intéressons pas au groupe de symétrie maximal de H_0 . On se restreint aux symétries du système provenant des symétries de translation de $B = \text{rot} A(r)$ seulement (pas de rotation ni d'inversion dans

le temps).

Soit

$$P(v) = e^{-\frac{i}{\hbar} P \cdot v}, \quad v \in V \quad (3.22)$$

un opérateur sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ agissant par translation, i.e.

$$(P(v)\psi)(r) = \psi(r-v), \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad (3.23)$$

- (i) On remarque que $(P(v)A_j)(r) = A_j(r-v)$ n'est pas égale à $A_j(r)$, où $A_j(r)$ est la j -ième composante du vecteur potentiel $A(r)$, $j=1,2,3$. Mais il existe un lien simple entre ces fonctions

$$A(r-v) = A(r) + \text{grad} \chi_r^A(v) \quad (3.24)$$

avec χ_r^A une fonction sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ à valeurs réelles.

(Hyp. 2) On suppose que χ_r^A est une fonction séparément $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ dans les deux variables $r, v \in \mathbb{R}^3$ et telle que $\chi_r^A(0) = 0$.

L'équation (3.24) ne détermine χ_r^A qu'à une fonction de v près. Cette fonction à valeurs réelles, notée f , est choisie borélienne et t.q. $f(0) = 0$. On définit

$$\chi_r^{A,f} = \chi_r^A + f \quad (3.25)$$

Démonstration : La relation (3.24) provient de la constance du champ magnétique; $P(v)B_j = \text{rot} A_j(r-v) = \text{rot} A_j(r) = B_j$, $j=1,2,3$ ■

- (ii) Notons $H_0 = H_0(A)$ et $H_0(A')$ l'hamiltonien de notre système où A' est un nouveau vecteur potentiel, obtenu par une transformation de jauge, i.e. $A' = A + \text{grad} \chi$.

Soit $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ une fonction propre de H_0 , correspondant à la valeur propre E . Alors la fonction

$$e^{-i\frac{e}{\hbar c} \chi^{A,f}(v)} P(v) \Psi \quad v \in V$$

est fonction propre de H_0 , correspondant à la même valeur propre.

Démonstration : On peut voir que

$$H_0(A') = e^{i\frac{e}{\hbar c} \chi} H_0(A) e^{-i\frac{e}{\hbar c} \chi}$$

De plus, dans le cas particulier où $A'(r) = A(r-v)$, on a $P(v)^{-1} H_0(A') P(v) = H_0(A)$. On en tire le résultat ■

On déduit de cette propriété que les opérateurs

$$U_{A,f}(v) = e^{-i\frac{e}{\hbar c} \chi^{A,f}(v)} P(v) \quad (3.26)$$

sont tels que

$$U_{A,f}(v) H_0 \leq H_0 U_{A,f}(v) \quad \forall v \in V \quad (3.27)$$

(iii) L'ensemble des opérateurs $\{U_{A,f}(v); v \in V\}$ définis par (3.26) forme une représentation borélienne unitaire à multiplicateur de V sur $L^2(\mathbb{R}^3)$, de multiplicateur $\omega_{A,f}$ défini par

$$\omega_{A,f}(v, v') = e^{-i\frac{e}{\hbar c} (\chi_r^{A,f}(v) + \chi_{r-v}^{A,f}(v') - \chi_r^{A,f}(v+v'))} \quad (3.28)$$

$v, v' \in V$, quel que soit $r \in \mathbb{R}^3$.

Remarque 6 : $\omega_{A,f}$ est indépendant de r . C'est une propriété du "connecting homomorphism" [C.J.].

Remarque 7 : On souligne que $\omega_{A;f}$ aurait pu être défini simplement à l'aide de (3.24), indépendamment du reste.

- (iv) Le relèvement de $\mathcal{U}_{A;f}$, la représentation BUM de multiplicateur $\omega_{A;f}$ de V sur $L^1(\mathbb{R}^3)$, par la méthode du §I.2. point B, nous fournit une représentation continue unitaire $W_{A;f}$ ($\mathcal{U}(1)$ -séparante) du groupe topologique (la $\omega_{A;f}$ -extension de V , §I.2. déf. 12).

$$V^{\omega_{A;f}}(B) = \left\{ (e^{2i\pi t}, v); t \in \mathbb{R}, v \in V, \text{ muni du produit} \right. \\ \left. (e^{2i\pi t}, v)(e^{2i\pi t'}, v') = (e^{2i\pi(t+t')\omega_{A;f}(v, v')}, v+v') \right\} \quad (3.29)$$

donnée par les opérateurs

$$W_{A;f}(e^{2i\pi t}, v) = e^{2i\pi t} \mathcal{U}_{A;f}(v) \quad ; t \in \mathbb{R}, v \in V \quad (3.30)$$

Proposition 6

Soient :

H_0 l'hamiltonien donné par (3.21) avec le potentiel vecteur A satisfaisant (Hyp. 1).

$V^{\omega_{A;f}}(B)$ le groupe topologique donné par (3.29).

$W_{A;f}$ la représentation continue unitaire de $V^{\omega_{A;f}}(B)$ sur $L^1(\mathbb{R}^3)$ donnée par (3.30).

Alors : $V^{\omega_{A;f}}(B)$ est un groupe de symétrie de H_0 appelé le groupe de symétrie de translation de H_0 .

Démonstration : Par la définition 25 du §I.4., on doit vérifier que

$$\begin{aligned} W_{A,f}(e^{i\pi t}, v)H. &\subseteq H.W_{A,f}(e^{i\pi t}, v) \\ \forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in V \end{aligned} \quad (3.31)$$

Cela découle de (3.27) et du fait que $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ et

$$\forall (e^{i\pi t}, v) \in V^{\omega_{A,f}}(B) \quad \text{on a} \quad W_{A,f}(e^{i\pi t}, v)\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$$

(voir §I.3. Remarque 13) ■

Proposition 7

Soient :

A un vecteur satisfaisant (Hyp. 1);

V le groupe topologique des translations dans $\mathbb{R}^3$;

$B = \text{rot} A(r) = \text{constante}, r \in \mathbb{R}^3$.

(a) Soient $\chi_{A,f}$ et $\chi_{A,f'}$ deux solutions de l'équation (3.24) satisfaisant (Hyp. 2).

Soient $\omega_{A,f}$ et $\omega_{A,f'}$ les fonctions boréliennes de V^*V dans $\mathcal{U}(1)$ définies par (3.28) à l'aide de $\chi_{A,f}$ et $\chi_{A,f'}$ respectivement.

Alors :

- . Les multiplicateurs $\omega_{A,f}$ et $\omega_{A,f'}$ de V sont similaires.
- . Les représentations BUM $\mathcal{U}_{A,f}$ et $\mathcal{U}_{A,f'}$ de V sur $L^2(\mathbb{R}^3)$, de multiplicateur respectif $\omega_{A,f}$ et $\omega_{A,f'}$, sont similaires (§I.2. Déf. 6).
- . Les groupes $V^{\omega_{A,f}}(B)$ et $V^{\omega_{A,f'}}(B)$ sont topologiquement isomorphes.

Proposition 7 (suite)

(b) Soit A' une fonction satisfaisant (Hyp. 1) et liée à A par une transformation de jauge γ , γ satisfaisant la première partie de (Hyp. 2) et t.q. $\gamma(0) = 0$.

$$\text{i.e. } A' = A + \text{grad } \gamma \quad \text{et}$$

(3.32)

$$\text{rot } A(r) = \text{rot } A'(r) = B = \text{constante}$$

Soient χ^A et $\chi^{A'}$ des solutions des équations (3.24) pour A et A' respectivement satisfaisant (Hyp. 2).

Soient ω_A et $\omega_{A'}$ les fonctions boréliennes de $V \times V$ dans $\mathcal{U}(1)$ définies par (3.28) à l'aide de $\chi^A = \chi^{A;0}$ et $\chi^{A'} = \chi^{A';0}$ respectivement.

Alors :

- . Les multiplicateurs ω_A et $\omega_{A'}$ de V sont similaires.
- . Les représentations BUM $\mathcal{U}_A = \mathcal{U}_{A;0}$ et $\mathcal{U}_{A'} = \mathcal{U}_{A';0}$ de V sur $L^1(\mathbb{R}^3)$, de multiplicateur respectif ω_A et $\omega_{A'}$, sont similaires.
- . Les groupes $V^{\omega_A}(B)$ et $V^{\omega_{A'}}(B)$ sont topologiquement isomorphes.

Proposition 7 (suite)

(c) Soit A'' une fonction satisfaisant (Hyp. 1) telle que :

$$B = \text{rot } A(r) = \text{const. ne soit pas égal à } B'' = \text{rot } A''(r) = \text{const.} \quad (3.23)$$

Soient χ^A et $\chi^{A''}$ des solutions des équations (3.24) pour A et A'' respectivement satisfaisant (Hyp. 2).

Soient ω_A et $\omega_{A''}$ les fonctions boréliennes de $V \times V$ dans $\mathcal{U}(1)$ définies par (3.28) à l'aide de $\chi^A = \chi^{A,0}$ et $\chi^{A''} = \chi^{A'',0}$ respectivement.

Alors :

- . Les multiplicateurs ω_A et $\omega_{A''}$ de V ne sont pas similaires.
- . Les représentations BUM $\mathcal{U}_A = \mathcal{U}_{A,0}$ et $\mathcal{U}_{A''} = \mathcal{U}_{A'',0}$ de V sur $L^1(\mathbb{R}^3)$, de multiplicateur respectif ω_A et $\omega_{A''}$, ne sont pas similaires.
- . MAIS les groupes $V^{\omega_A}(B)$ et $V^{\omega_{A''}}(B'')$ sont topologiquement isomorphes.

Démonstration :

(a) Par (3.28) et (3.25) on a immédiatement que

$$\omega_{A,f}(v, v') = e^{-i \frac{e}{\hbar c} \{ (f-f')(v) + (f-f')(v') - (f-f')(v+v') \}} \omega_{A,f'}(v, v')$$

d'où

$$\mathcal{U}_{A,f}(v) = e^{-i \frac{e}{\hbar c} (f-f')(v)} \mathcal{U}_{A,f'}(v)$$

La dernière assertion découle du §I.2. Prop. 2 (ii).

(b) Posons

$$-\varphi(v) = \chi_r^A(v) - \chi_r^{A'}(v) + \mathcal{J}(r-v) - \mathcal{J}(r) \quad \text{quels que soient } r, v \in \mathbb{R}^3 \quad (3.34)$$

On vérifie que φ est indépendante de r en prenant le gradient de l'expression (3.34).

On a

$$\omega_{A'}(v, v') = e^{-i \frac{e}{\hbar c} \{ \varphi(v) + \varphi(v') - \varphi(v+v') \}} \omega_A(v, v') \quad (3.35)$$

et

$$\begin{aligned} (U_{A'}(v)\phi)(r) &= \left(e^{-i \frac{e}{\hbar c} \chi_r^{A'}(v)} e^{-i \frac{e}{\hbar} p \cdot v} \phi \right)(r) \\ &= e^{-i \frac{e}{\hbar c} \{ \varphi(v) + \chi_r^A(v) + \mathcal{J}(r-v) - \mathcal{J}(r) \}} \left(e^{-i \frac{e}{\hbar} p \cdot v} \phi \right)(r) \\ &= e^{-i \frac{e}{\hbar c} \varphi(v)} e^{i \frac{e}{\hbar c} \mathcal{J}(r)} e^{-i \frac{e}{\hbar c} \chi_r^A(v)} \left(e^{-i \frac{e}{\hbar} p \cdot v} e^{-i \frac{e}{\hbar c} \mathcal{J}(\cdot)} \phi \right)(r) \\ &= \left(e^{-i \frac{e}{\hbar c} \varphi(v)} e^{i \frac{e}{\hbar c} \mathcal{J}(\cdot)} U_A(v) e^{-i \frac{e}{\hbar c} \mathcal{J}(\cdot)} \phi \right)(r) \\ \forall \phi &\in L^2(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

La dernière assertion découle du §I.2. Prop. 2 (ii).

(c) Plaçons-nous dans la jauge symétrique (cela suffit par (b)). Dans cette jauge, les potentiels vecteurs A et A'' sont notés A^s et A''^s .

On a

$$A^s(r) = \frac{1}{2} B \wedge r \quad \text{et} \quad A''^s(r) = \frac{1}{2} B'' \wedge r, \quad r \in \mathbb{R}^3 \quad (3.36)$$

$$\chi_r^{A^s}(v) = \frac{1}{2} B \cdot (r \wedge v) \quad \text{et} \quad \chi_r^{A''^s}(v) = \frac{1}{2} B'' \cdot (r \wedge v) \quad (3.37)$$

$r, v \in \mathbb{R}^3$

$$\omega_{A^s}(v, v') = e^{i \frac{e}{2\hbar c} B \cdot (v \wedge v')} \quad \text{et} \quad \omega_{A''^s}(v, v') = e^{i \frac{e}{2\hbar c} B'' \cdot (v \wedge v')} \quad (3.38)$$

$v, v' \in \mathbb{R}^3$

1° Supposons que $\omega_{A''}$ et $\omega_{A'}$ soient similaires, i.e. il existe une fonction borélienne non nulle $\nu: V \rightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$$\omega_{A''}(v, v') = e^{i \frac{e}{\hbar c} \{ \nu(v) + \nu(v') - \nu(v+v') \}} \omega_{A'}(v, v')$$

On en déduit que

$$(B'' - B) \circ (v \wedge v') = \nu(v) + \nu(v') - \nu(v+v'), \quad \forall v, v' \in V \quad (3.39)$$

Or, le membre gauche de (3.39) est une forme antisymétrique en $v, v' \in V$ tandis que le membre droit de (3.39) est une forme symétrique en v, v' .
D'où $B = B''$, contradiction.

2° $\omega_{A''}$ et $\omega_{A'}$ n'étant pas similaires, il en est de même des représentations à multiplicateur correspondantes.

3° L'application

$$\gamma_{B''}^B : V^{\omega_{A'}}(B) \longrightarrow V^{\omega_{A''}}(B'') \quad (3.40)$$

$$(e^{i\pi t}, v) \longmapsto (e^{i\pi t}, \frac{1}{\sqrt{B \cdot B''}} B \wedge v)$$

est un isomorphisme topologique ■

CONCLUSION : Les groupes topologiques $V^{\omega_{A'}/B}(B)$, $V^{\omega_{A'}}(B)$ et $V^{\omega_{A''}}(B'')$ sont tous des groupes de symétrie isomorphes de l'hamiltonien du système d'un électron dans un champ magnétique constant, quel que soit le choix du potentiel vecteur A, A' ou A'' respectivement, i.e. quel que soit le choix de la jauge et quel que soit le choix du champ magnétique constant.

Calcul de l'algèbre de Lie du groupe de symétrie $V^{\omega_{A,p}}(B)$ de H_0 .

(i) Les sous-groupes à un paramètre de $V^{\omega_{A,p}}(B)$ sont donnés par

$$g_{t,v}(\lambda) = (e^{i\pi\lambda t}, \lambda v) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.41)$$

On en déduit que l'algèbre de Lie de $V^{\omega_{A,p}}(B)$, notée $\mathcal{W}^{\omega_{A,p}}(B)$, est en tant que variété le produit direct $\mathbb{R} \times V$. Nous identifions $(t,v) \in \mathbb{R} \times V$ avec $t_u + v \in \mathbb{R} \oplus V$ par l'application de $\mathbb{R} \times V$ sur $\mathbb{R} \oplus V$ envoyant $(t,0)$ sur u_0 et $(0,v)$ sur v , où u_0 est un élément quelconque fixé de $\mathbb{R}$.

(ii) Le commutateur de deux éléments $(e^{i\pi t}, v)$ et $(e^{i\pi t'}, v')$ de $V^{\omega_{A,p}}(B)$ vaut

$$(e^{i\pi t}, v)(e^{i\pi t'}, v')(e^{i\pi t}, v)^{-1}(e^{i\pi t'}, v')^{-1} = (\omega_{A,p}(v, v') \overline{\omega_{A,p}(v', v)}, 0) \quad (3.42)$$

Proposition 8

(a) L'algèbre de Lie du groupe de Lie $V^{\omega_{A,p}}(B)$ est $\mathcal{W}^{\omega_{A,p}}(B)$, i.e. l'espace vectoriel $\mathbb{R} \times V$ muni du crochet de Lie

$$[u_0, v] = 0 \quad , \quad v \in V$$

$$[v, v'] = -\frac{c}{2\pi\hbar c} \left\{ \chi_r^{A,p}(v) - \chi_r^{A,p}(v') + \chi_{r-v}^{A,p}(v') - \chi_{r-v'}^{A,p}(v) \right\} u_0 \quad (3.43)$$

$v, v', r \in V$.

(b) $\mathcal{W}^{\omega_{A,p}}(B)$ est une algèbre de symétrie de l'hamiltonien H_0 appelée l'algèbre de symétrie de translation de H_0 .

Démonstration :

(a) Découle de (i) et (ii) avec l'expression (3.28) pour $\omega_{A,p}$.

(b) $V^{\omega_{A,p}}(B)$ est un groupe de symétrie de H_0 (voir Prop. 6); par

§I.5. Prop. 9 on a que $\mathcal{W}^{\omega_{A,p}}(B)$ est une algèbre de symétrie de H_0 . ■

Les générateurs infinitésimaux de la représentation $\mathcal{W}_{A,P}$ du groupe de symétrie $\mathcal{V}^{A,P}(B)$ de H_0 sur $L^2(\mathbb{R}^3)$

Considérons la représentation continue unitaire du groupe de symétrie de translation de l'hamiltonien H_0 fournissant les opérateurs qui laissent invariant H_0 . (voir (3.30) et (3.31))

$$W_{A,P}(e^{i\pi t}, v) = e^{i\pi t} e^{-i \frac{e}{\hbar c} \chi^{A,P}(v)} e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot v}, \quad t \in \mathbb{R}, v \in V \quad (3.30)$$

Proposition 9

(a) Les opérateurs infinitésimaux de la représentation $\mathcal{W}_{A,P}$ associés aux sous-groupes à un paramètre

$$W_{A,P}(e^{i\pi t}, 0) = e^{i\pi t S_A^0} \quad \text{et} \quad W_{A,P}(1, v_j) = e^{-\frac{i}{\hbar} v_j S_A^j}$$

$t, v_j \in \mathbb{R}, j=1,2,3$, nous fournissent les opérateurs essentiellement autoadjoints

$$S_A^0 = \text{Id}_{C_0(\mathbb{R}^3)} \quad \text{et} \quad S_A^j = \frac{e}{\hbar c} \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \chi^{A,P}(v) \right) \Big|_{v=0} + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (3.44)$$

respectivement définis sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ et satisfaisant

$$[S_A^j, S_A^k] = \frac{\hbar e}{i c} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_j \partial v_k} \chi^{A,P}(v) \right) \Big|_{v=0} - \left(\frac{\partial}{\partial x_k \partial v_j} \chi^{A,P}(v) \right) \Big|_{v=0} \right\} \text{Id}_{C_0(\mathbb{R}^3)} \quad (3.45)$$

sur cet espace; $j, k=1,2,3$.

(b) Les opérateurs $S_A^0, S_A^j, j=1,2,3$, donnés par (3.44) et satisfaisant (3.45) forment une base normale de l'algèbre de Lie d'opérateurs $\tilde{W}_{A,P}(\mathcal{W}^{A,P}(B))$ où $\tilde{W}_{A,P}$ est la représentation infinitésimale associée à $W_{A,P}$ et $\mathcal{W}^{A,P}(B)$ est l'algèbre de symétrie de translation de H_0 .

Démonstration :

(a) Simples calculs.

(b) $W^{\omega_{A;P}}(B)$ est l'algèbre de symétrie de translation de H_0 , la représentation T de §I.5. Déf. 31 étant $\tilde{W}_{A;P}$; d'autre part :

$$S_A^0 = \frac{1}{2\pi} \tilde{W}_{A;P}(t) \quad \text{et} \quad S_A^j = i\hbar \tilde{W}_{A;P}(v_j) \quad \blacksquare$$

Remarque 8 : Le crochet (3.45) est indépendant du choix de la jauge.

Par la proposition 9 ci-dessus et la Prop. 6 du §I.3., nous pouvons interpréter les générateurs infinitésimaux de la représentation $W_{A;P}$ du groupe de symétrie $V^{\omega_{A;P}}(B)$ de H_0 de la manière suivante.

Les observables $\{S_A^j\}$ correspondant aux opérateurs essentiellement autoadjoints S_A^j définis sous (3.44) sont des constantes du mouvement ($j=1,2,3$) .

Remarque 9 : Si pour déterminer l'algèbre de symétrie de translation de l'hamiltonien H_0 on emprunte un chemin analogue à celui suivi pour construire le groupe de symétrie de translation de H_0 (§III.3.1. points (i), (ii) et (iii)), on trouve tout d'abord une représentation antisymétrique à multiplicateur de l'algèbre de Lie du groupe V , notée aussi V , sur $L^2(\mathbb{R}^3)$. Il est possible de relever cette représentation en une représentation linéaire de V^α sur $L^2(\mathbb{R}^3)$, où le multiplicateur α est une application bilinéaire antisymétrique de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ (le correspondant pour une algèbre d'un multiplicateur pour un groupe) et V^α est l' α -extension de l'algèbre V par l'algèbre $\mathbb{R}$; cela se fait par analogie à la méthode du relèvement des représentations BOM d'un groupe topologique exposée au §I.2. point B voir [A.C.]. L'algèbre de symétrie de translation de H_0 est ainsi l' α -extension de V par $\mathbb{R}$ avec α définie par $[v, v'] = \alpha(v, v')u_0$, $v, v' \in V$ (voir (3.43)).

§III.3.2. Construction d'un ensemble de fonctions propres de l'hamiltonien H_0 .

Du fait que les groupes de symétrie de translation de l'opérateur H_0 sont tous isomorphes quel que soit le choix de la jauge et quel que soit le champ magnétique constant, nous allons examiner dans ce qui suit, par souci de simplicité, un système dans lequel

(Hyp. 3) Le champ magnétique est dirigé le long de l'axe e_3 . On a

$$B = \frac{ch}{e|\Omega|} \eta e_3 \quad (3.46)$$

où η est un nombre réel sans dimension ($[B] = \text{Gauss}$; la quantité $\frac{ch}{e} = 4,1358 \cdot 10^{-7} \text{ Gauss} \cdot \text{cm}^2$ est l'unité de flux quantique) et où $|\Omega| = |e_1 \cdot (e_1 \wedge e_3)|$ est le volume de la cellule construite avec e_1, e_2 et e_3 .

et on se placera dans la jauge symétrique

$$A^s(r) = \frac{1}{2} B \wedge r \quad (3.36)$$

Dans un premier pas, nous allons voir que le groupe d'invariance de l'hamiltonien d'un tel système se factorise en un produit direct d'un groupe de translation dans la direction du champ e_3 par un groupe de Heisenberg de dimension trois $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_3}(3)$.

(Hyp. 4) Ignorant le simple mouvement de translation de notre système le long de l'axe e_3 , on note encore H_0 l'hamiltonien du système dans le plan perpendiculaire au champ.

On en déduit que le groupe de symétrie de translation de l'hamiltonien H_0 du système d'un électron soumis à un champ magnétique constant et satisfaisant (Hyp. 3) et (Hyp. 4) est le groupe de Heisenberg $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_3}(3)$.

Ensuite, à l'aide d'un système discret d'états cohérents de Glauber de $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_3}(3)$ nous construisons pour chaque niveau de Landau ℓ un ensemble

de fonctions propres de H_0 qui est total minimal dans l'espace de Hilbert engendré par les fonctions propres de H_0 pour le niveau ℓ considéré.

Puis on insérera de manière naturelle le groupe de Heisenberg $||H_{\frac{1}{2}}\eta\sigma_0(3)$ dans un groupe de Heisenberg plus grand $||H_{\frac{1}{2}}\eta\sigma_0(5)$ (car l'espace de phase de notre système muni de (Hyp. 4) est $\mathbb{R}^5$ et les fonctions propres de H_0 que l'on considère appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^3)$, qui est l'espace de représentation du groupe $||H_{\frac{1}{2}}\eta\sigma_0(5)$ par la représentation de Schrödinger). Ce qui nous permettra de voir que l'ensemble discret total minimal de fonctions propres de H_0 considérées appartient à un système d'états cohérents du groupe $||H_{\frac{1}{2}}\eta\sigma_0(5)$ lui-même.

Le groupe de Heisenberg $||H_{\frac{1}{2}}\eta\sigma_0(3)$ est le groupe de symétrie de translation de l'opérateur H_0 satisfaisant (Hyp. 3) et (Hyp. 4)

Pour le système dans l'espace $\mathbb{R}^3$ d'un électron soumis à un champ magnétique constant B donné par (3.46), dans la jauge symétrique, le groupe de symétrie de translation de H_0 est

$$V^{\omega_{A^*};0}(B) = \left\{ (e^{i\pi t}, v); t \in \mathbb{R}, v \in V, \text{ muni du produit} \right. \\ \left. (e^{i\pi t}, v)(e^{i\pi t'}, v') = (e^{i\pi(t+t' + \frac{e}{4\pi k c} B \cdot (v \wedge v'))}, v+v') \right\} \quad (3.47)$$

(utiliser (3.29) et (3.38)).

Tout élément de $V^{\omega_{A^*};0}(B)$ pouvant s'écrire de manière unique

$$(e^{i\pi t}, v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) = (0, v_3 e_3)(e^{i\pi t}, v_1 e_1 + v_2 e_2), \quad t, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \quad (3.48)$$

on a que le groupe $V^{\omega_{A^*};0}(B)$ est le produit direct du groupe abélien de translation $\{(0, v_3 e_3); v_3 \in \mathbb{R}\}$ le long de l'axe e_3 par le groupe non abélien

$$\left\{ (e^{i\pi t}, v_1 e_1 + v_2 e_2); t, v_1, v_2 \in \mathbb{R}, \text{ muni du produit} \right. \\ \left. (e^{i\pi t}, v_1 e_1 + v_2 e_2)(e^{i\pi t'}, v'_1 e_1 + v'_2 e_2) = \right. \\ \left. (e^{i\pi(t+t' + \frac{e}{2} (v_1 v'_2 - v'_1 v_2))}, (v_1 + v'_1) e_1 + (v_2 + v'_2) e_2) \right\} \quad (3.49)$$

Ce dernier groupe (3.49) s'identifie avec le groupe de Heisenberg $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma}^{(3)}$ en envoyant $(e^{2\pi t}, v_1 e_1 + v_2 e_2)$ sur $e^{2\pi t} e^v$, où $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$, la base $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ jouant le rôle de la base symplectique de $(\mathbb{R}^2, \frac{1}{2}\eta\sigma)$.

Ainsi, le groupe de Heisenberg $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma}^{(3)}$ est le groupe de symétrie de translation de l'hamiltonien

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left\{ \left(p_x - \frac{h}{2} \eta y \right)^2 + \left(p_y + \frac{h}{2} \eta x \right)^2 \right\} \quad (3.50)$$

d'un électron dans le plan $\{v_1 e_1 + v_2 e_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$ soumis à un champ magnétique constant $B = \frac{ch}{e|\Omega|} \eta e_3$, e_3 étant perpendiculaire à e_1 et à e_2 (on a utilisé (3.21), (3.36), (3.46) et (3.47)).

Remarque 10 : La restriction de la représentation $W_{\mathbb{R}^2, 0}$ de $V^{\omega, 0}(B)$ (voir (3.30) et (3.46)) au groupe de Heisenberg $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma}^{(3)}$ nous fournit une représentation continue unitaire irréductible de $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma}^{(3)}$ sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, envoyant $e^{2\pi t}$ sur $e^{2\pi t} \text{Id}_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, qui est par conséquent équivalente à la représentation de type "position" $(\tau_{\frac{1}{4}\tau}^{\frac{1}{2}\eta A}, L^2(\mathbb{R}))$ de ce même groupe (voir §I.2. Prop. A).

Construction d'un ensemble de fonctions propres de l'opérateur H_0 qui est total minimal dans l'espace de Hilbert engendré par les fonctions propres de H_0 pour le niveau de Landau ℓ

Considérons l'opérateur H_0 donné par (3.50). La fonction

$$\phi_\ell(x_1, x_2) = (\sqrt{\pi\eta})^{\ell+1} \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{\ell!}} (x_1 + ix_2)^\ell e^{-\frac{\pi}{2}\eta(x_1^2 + x_2^2)} \quad (3.51)$$

est fonction propre de H_0 correspondant à la valeur propre

$$E_\ell = \left(\ell + \frac{1}{2}\right) h \frac{h}{m} \eta, \quad \ell \in \mathbb{N} \quad (3.52)$$

Elle est de carré intégrable sur $\mathbb{R}^2$ (c'est la première fonction, que nous avons normalisée à un, de l'ensemble des fonctions propres de H_0 construites par Dingle [Di.] pour le niveau de Landau ℓ).

Comparant les expressions (3.7) et (3.51) on remarque que

$$\phi_{\ell}(x_1, x_2) = \sqrt{\eta} \langle \ell | \sqrt{\eta\eta} (x_1 + ix_2) \rangle \quad (3.53)$$

où : $(\pi_1^{-\frac{1}{2}\eta D_1}, \mathcal{H}_1^{D_1})$ est la représentation de type B.F.S. induite à gauche du groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(3)$ (on la déduit de celle de $\mathbb{H}(3)$, voir §II.2.D, par l'isomorphisme liant $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(3)$ et $\mathbb{H}(3)$).

$\Psi_{\sqrt{\eta\eta}(x_1+ix_2)}$ appartient au système d'états cohérents de type $(\pi_1^{-\frac{1}{2}\eta D_1}, \Psi_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\eta})$ de $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(3)$ (voir §III.2)

$\{u_{\ell} ; u_{\ell}(z) = (\sqrt{\eta\eta})^{\ell+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\ell!}} z^{\ell} ; \ell = 0, 1, \dots, \infty\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}_1^{D_1}$.

$$\langle \ell | \sqrt{\eta\eta} (x_1 + ix_2) \rangle = \int_{\mathbb{C}} e^{-\eta\eta|z|^2} \overline{u_{\ell}(z)} \Psi_{\sqrt{\eta\eta}(x_1+ix_2)}(z) dz d\bar{z}.$$

Ceci nous permet d'interpréter $\phi_{\ell}(x_1, x_2)$ comme un multiple du coefficient numéro ℓ du développement de l'état cohérent $\Psi_{\sqrt{\eta\eta}(x_1+ix_2)}$ du groupe $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(3)$ dans la base $\{u_{\ell} ; \ell = 0, 1, \dots, \infty\}$ de $\mathcal{H}_1^{D_1}$.

Considérons le réseau principal suivant

$$\mathbb{L}_{\frac{1}{2}\eta} = \left\{ m e_1 + n \frac{1}{\eta} e_2 ; n, m \in \mathbb{Z} \right\} \quad (3.54)$$

de l'espace symplectique $(\mathbb{R}^2, \frac{1}{2}\eta\sigma_0)$, et le sous-système discret

$$\left\{ \Psi_{\sqrt{\eta\eta}\alpha_{mn}} ; \alpha_{mn} = (x_1 - m) + i(x_2 - n \frac{1}{\eta}) ; m, n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (3.55)$$

du système d'états cohérents de type $(\pi_1^{-\frac{1}{2}\eta D_1}, \Psi_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\eta})$ de $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(3)$.

Pour chaque état cohérent $\Psi_{\sqrt{\eta\eta}\alpha_{mn}}$ définissons une fonction

$$\phi_{\ell;mn}(x_1, x_2) = \sqrt{\eta} \langle \ell | \sqrt{\eta\eta} \alpha_{mn} \rangle \quad (3.56)$$

Chaque $\phi_{\ell; m, n}$ est fonction propre de H_0 correspondant à la valeur propre $E_{\ell}^{l, m, n}$ et est de carré intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 10

L'ensemble

$$\phi_{\ell; m, n}(x_1, x_2) = (\sqrt{\pi} \eta)^{\ell+1} \frac{1}{i^{\ell} \ell!} \left((x_1 - m) + i(x_2 - \frac{n}{\eta}) \right)^{\ell} e^{-\frac{\pi}{2} \eta [(x_1 - m)^2 - (x_2 - \frac{n}{\eta})^2]} \quad (3.57)$$

$m, n \in \mathbb{Z}$ de fonctions propres de H_0 est total dans l'espace de Hilbert engendré par les fonctions propres de H_0 pour le niveau de Landau ℓ . Il est total minimal par suppression d'un état $\phi_{\ell; m', n'}$, m', n' entiers quelconques fixés, et n'est plus total si on en enlève plus d'un.

Démonstration : (3.56) et (3.7) donnent (3.57). L'assertion découle du §III.2. Prop. 4 ■

Interprétation géométrique des fonctions propres $\phi_{\ell; m, n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ de H_0 correspondant au niveau de Landau ℓ

- Définition 7 : Soit B l'intensité d'un champ magnétique constant perpendiculaire au plan $\mathbb{R}^2$. Un réseau de l'espace de configuration à deux dimensions $\mathbb{R}^2$, correspondant à la division de $\mathbb{R}^2$ en "cellules magnétiques" (i.e. : de surface S t.q. $SB = hc/e$; hc/e l'unité quantique de flux), est appelé RESEAU de PIPPARD.

La fonction ϕ_{ℓ, m_n} représente l'électron du système sur une orbite centrée au site $m e_1 + n e_2$ du réseau de Pippard $L_{\frac{1}{2}\eta}$ de $\mathbb{R}^2$. La valeur maximale du module au carré de ϕ_{ℓ, m_n} apparaît lorsque le rayon de cette orbite vaut $r_* = \sqrt{\frac{1}{2\pi\eta}} \frac{1}{\ell}$, qui est très près, comme on pouvait l'espérer, du rayon de l'orbite classique correspondante $R = \sqrt{\frac{1}{2\pi\eta}} (2\ell + 1)$.

Les fonctions ϕ_{ℓ, m_n} , $m, n \in \mathbb{Z}$ construites à l'aide d'états cohérents de $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(3)$ sont des états cohérents du groupe $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(5)$

L'ensemble de fonctions ϕ_{ℓ, m_n} , $m, n \in \mathbb{Z}$ (3.57) a été obtenu à partir d'un sous-système discret d'états cohérents du groupe de symétrie $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(3)$ de l'hamiltonien H_0 . Ce groupe de Heisenberg est associé à l'espace symplectique $(\mathbb{R}^2, \frac{1}{2}\eta\sigma_0)$, de base symplectique $\{e_1, e_2\}$, la base de l'espace de configuration de notre système. Ainsi, se plaçant dans l'espace de phase $\mathbb{R}^4$, il est naturel de se demander si le groupe de Heisenberg associé à l'espace symplectique $(\mathbb{R}^4, \frac{1}{2}\eta\sigma_0)$ n'intervient pas directement dans notre problème.

Proposition 11

Soient

$H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(5)$ le groupe de Heisenberg associé à l'espace symplectique $(\mathbb{R}^4, \frac{1}{2}\eta\sigma_0)$ de base symplectique $\{e_1, e_2, p_1, p_2\}$.

$$\widetilde{H} = \left\{ e^{i u \cdot} e^v ; t \in \mathbb{R}, v = x_1 \left(e_1 - \frac{1}{2} p_1 \right) + x_2 \left(e_2 + \frac{1}{2} p_2 \right) ; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

un sous-groupe de $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(5)$.

$(\pi'_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}, L^2(\mathbb{R}^2))$ la représentation de type position induite à gauche de $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(5)$.

(suite, voir page suivante)

Proposition 11 (suite)

Alors :

(a) L'application $\Psi: H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(3) \longrightarrow \tilde{H} \subset H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(5)$ envoyant
 $e^{tu_0} e^{x_1 e_1 + x_2 e_2}$ sur $e^{tu_0} e^{x_1(e_1 - \frac{1}{2}P_1) + x_2(e_2 + \frac{1}{2}P_2)}$ est un
 isomorphisme de groupes, le seul conservant les composantes selon
 e_1 et e_2 .

(b) Le système d'états cohérents de type $(\pi'_{10}{}^{\frac{1}{2}\eta A}, \phi_e)$ de $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(5)$
 est donné par $\{ \phi_{e; x_1 e_1 + x_2 e_2} = \pi'_{10}{}^{\frac{1}{2}\eta A}(e^{x_1 e_1 + x_2 e_2}) \phi_e ; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$
 et on a

$$\phi_{e; mn} = \pi'_{10}{}^{\frac{1}{2}\eta A}(e^{m e_1 + \frac{n}{2} e_2}) \phi_e, \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (3.58)$$

Démonstration :

(a) La recherche d'un sous-groupe de $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(5)$ tel que l'application
 de $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(3)$ sur ce sous-groupe envoyant $e^{tu_0} e^{x_1 e_1 + x_2 e_2}$ sur
 $e^{tu_0} e^{x_1 e_1 + x_2 e_2 + y_1 P_1 + y_2 P_2}$ soit un isomorphisme de groupes nous
 donne $y_1 = \frac{1}{2} x_1$ et $y_2 = -\frac{1}{2} x_2$.

$$(b) \left(\pi'_{10}{}^{\frac{1}{2}\eta A} \left(e^{tu_0} e^{y_1 P_1 + y_2 P_2} e^{x'_1 e_1 + x'_2 e_2} \right) \phi \right) (x_1, x_2) =$$

$$e^{2i\pi t} e^{-2i\pi \eta (x_1 y'_1 + x_2 y'_2)} \phi(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2)$$

où $t, x_1, x_2, x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 \in \mathbb{R}$ et $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$

Le sous-groupe stationnaire de ϕ_e est $H_A = \{ e^{tu_0} e^{y_1 P_1 + y_2 P_2} ; t, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \}$

(c.f. §III.2. Déf. 2). Les états cohérents de type $(\pi'_{10}{}^{\frac{1}{2}\eta A}, \phi_e)$ de
 $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(5)$ sont donnés par

$$\left\{ \pi'_{10}{}^{\frac{1}{2}\eta A}(g) \phi_e ; g \in H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(5), \text{ un seul représentant par classe à gauche} \right.$$

$$\left. g \in H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_0}(5)/H_A \cong \{ x_1 e_1 + x_2 e_2 ; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} \right\}$$

Remarque 11 : Le fait que les fonctions $\phi_{\ell, mn}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ liées à des états cohérents de $H_{\frac{1}{2}\varrho\sigma_0}(3)$ soient des états cohérents de $H_{\frac{1}{2}\varrho\sigma_0}(5)$ n'est pas fortuit. Il reflète l'isomorphisme entre les groupes $H_{\frac{1}{2}\varrho\sigma_0}(3)/\mathbb{Z}$ et $H_{\frac{1}{2}\varrho\sigma_0}(5)/H_A$ dont les éléments numérotent les états cohérents des deux types considérés respectivement.

Remarque 12 : Le choix d'autres représentants des classes à gauche appartenant à $H_{\frac{1}{2}\varrho\sigma_0}(5)/H_A$, par exemple l'ensemble $\{x_1(e_4 - \frac{1}{2}f_1) + x_2(e_1 + \frac{1}{2}f_4); x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ au lieu de $\{x_1e_4 + x_2e_1; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, nous fournit un ensemble d'états cohérents qui diffèrent d'un facteur de phase des états cohérents

$\phi_{\ell; x_1e_4 + x_2e_1}$; explicitement on a

$$\begin{aligned} \Psi_{\ell; x'_1(e_4 - \frac{1}{2}f_1) + x'_2(e_1 + \frac{1}{2}f_4)}(x_1, x_2) &= \left(\pi_{\frac{1}{20}}^{\frac{1}{2}\varrho A} \left(e^{x'_1(e_4 - \frac{1}{2}f_1) + x'_2(e_1 + \frac{1}{2}f_4)} \right) \right) \phi_{\ell}(x_1, x_2) \\ &= e^{-i\pi\varrho(x_1x'_2 - x_2x'_1)} \phi_{\ell; x'_1e_4 + x'_2e_1}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.59)$$

En particulier, soit $\mathcal{L} = \{m(e_4 - \frac{1}{2}f_1) + \frac{n}{\varrho}(e_1 + \frac{1}{2}f_4); m, n \in \mathbb{Z}\}$ le réseau (non principal) de $\mathbb{R}^4$ obtenu à l'aide de l'image par Ψ du sous-groupe $\{e^{tu}e^v; t \in \mathbb{R}, v \in L_{\frac{1}{2}\varrho}\}$ de $H_{\frac{1}{2}\varrho\sigma_0}(3)$ dans $H_{\frac{1}{2}\varrho\sigma_0}(5)$ et définissons

$$\Psi_{\ell; mn} = \Psi_{\ell; m(e_4 - \frac{1}{2}f_1) + \frac{n}{\varrho}(e_1 + \frac{1}{2}f_4)}$$

alors on a

$$\Psi_{\ell; mn}(x_1, x_2) = e^{i\pi\varrho(x_1m - x_2\frac{n}{\varrho})} \phi_{\ell; mn}(x_1, x_2); \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (3.60)$$

qui est exactement l'ensemble de fonctions propres de H_{ℓ} correspondant au niveau de Landau ℓ considéré dans [Boo.1].

Remarque 13 : Dans son article original [Pi.] Pippard introduit un réseau carré ayant une cellule élémentaire de surface déterminée uniquement par la force du champ magnétique et choisie pour donner la densité d'états correcte. La définition 7 comprend des réseaux non carrés.

CONCLUSION : Chaque énergie propre E_ℓ de l'hamiltonien H_0 d'un électron soumis à un champ magnétique constant est infiniment dégénérée; la recherche d'un ensemble total minimal de fonctions propres pour le niveau ℓ par exploitation du groupe de symétrie de l'opérateur H_0 nous a permis de retrouver l'intéressant ensemble des translatées de la première fonction de Dingle (voir [Di.] et formule (1) de [Pi.]) sur le réseau de Pippard [Pi.]; ces fonctions sont utilisées dans des traitements par perturbation de problèmes liés au système d'un électron soumis à un champ magnétique constant [Pi.], [Cap.]. On souligne que ce problème a été résolu d'une autre façon dans [Boo.1]. Le point de vue "théorie des groupes" adopté ici nous permet de voir en plus que ces fonctions sont des états cohérents du groupe de Heisenberg $|\mathcal{H}_{\frac{1}{2}\sigma_s}(5)\rangle$, c'est-à-dire que ce sont des paquets d'onde d'incertitude minimum.

§III.3.3. Groupe de symétrie de translation de l'hamiltonien d'un électron de Bloch soumis à un champ magnétique constant

Nous avons tout d'abord que le groupe de symétrie de translation de l'hamiltonien H d'un électron de Bloch soumis à un champ magnétique constant est un sous-groupe du groupe de symétrie de translation de H_0 . A la différence du cas sans potentiel cristallin, les groupes de symétrie de translation de H ne sont pas tous isomorphes lorsqu'on change la jauge ou le champ B ; en fait, si le champ B est rationnel, le groupe de symétrie de translation de H est de type I; si le champ B est irrationnel, le groupe de symétrie de translation de H n'est pas de type I (Prop. 14). Comment interpréter physiquement ce résultat ? (Prop. 15). Pour terminer ce paragraphe, nous considérons le système d'un électron de Bloch soumis à un champ magnétique constant, dans le cas particulier où le champ est rationnel et dirigé selon un axe du cristal. Nous mentionnons quelques propriétés spectrales de l'hamiltonien qui décrit le mouvement de ce système dans le plan perpendiculaire au champ (Prop. 16); ces propriétés

découlent du fait que le groupe de symétrie de translation de cet hamiltonien est un sous-groupe du groupe de Heisenberg $\|H_{\frac{1}{2}\eta\sigma}(3)$, que ce dernier groupe s'insère de manière naturelle dans le groupe $\|H_{\frac{1}{2}\eta\sigma}(5)$ (voir §III.3.2. Prop. 11(a)) et que la représentation de type réseau de $\|H_{\frac{1}{2}\eta\sigma}(5)$ est une induite.

Soit

$$H = \frac{1}{2m} \left(p + \frac{e}{c} A \right)^2 + \Phi = H_0 + \Phi \quad (3.61)$$

l'hamiltonien d'un électron dans l'espace $\mathbb{R}^3$ soumis à un champ magnétique constant $B = \text{rot} A(r) = \text{constante}$, $r \in \mathbb{R}^3$ et à un potentiel périodique Φ d'un cristal tridimensionnel. Le potentiel vecteur A satisfait (Hyp. 1).

(Hyp. 5) On suppose que $\Phi \in L^2_{\text{loc}, \mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ est périodique sur le réseau

$$L = \{ k = k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 ; k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{i.e. telle que } (P(k)\Phi)(r) = \Phi(r-k) = \Phi(r), \forall k \in L \quad (3.62)$$

Proposition 12

L'hamiltonien H donné par (3.61) avec le potentiel vecteur A satisfaisant (Hyp. 1) et le potentiel cristallin Φ satisfaisant (Hyp. 5) est essentiellement autoadjoint sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Démonstration : Voir Th. X.34 de réf. [R.S.] ■

Recherche d'un groupe de symétrie de H

Puisque L est un sous-groupe de V , le groupe de toutes les translations dans $\mathbb{R}^3$, on a que l'ensemble

$$\begin{aligned} L_{\omega, \rho}(B) = & \{ (e^{2i\pi t}, k); t \in \mathbb{R}, k \in L \text{ muni du produit} \\ & (e^{2i\pi t}, k) (e^{2i\pi t'}, k') = (e^{2i\pi(t+t')}, \omega_{A, \rho}(k, k'), k+k') \} \end{aligned} \quad (*)$$

est un sous-groupe fermé de $V^{w_{A,f}}(B)$ (voir (3.29)).

Proposition 13

Soient

H l'hamiltonien donné par (3.61) avec le potentiel vecteur A satisfaisant (Hyp. 1) et le potentiel cristallin Φ satisfaisant (Hyp. 5)

$L^{w_{A,f}}(B)$ le groupe topologique donné par (*)

$W_{A,f}|_L$ la représentation continue unitaire de $L^{w_{A,f}}(B)$ sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ déduite de (3.30) par restriction à $L^{w_{A,f}}(B)$

Alors : $L^{w_{A,f}}(B)$ est un groupe de symétrie de l'opérateur H appelé le groupe de symétrie de translation de H .

Démonstration : Du fait que $L^{w_{A,f}}(B)$ est un sous-groupe de $V^{w_{A,f}}(B)$ on a que tous les opérateurs $W_{A,f}|_L(e^{i\pi k t}, k) = W_{A,f}(e^{i\pi k t}, k)$; $t \in \mathbb{R}, k \in L$ commutent à H_0 ; au vu des équations (3.62) et (3.30), les opérateurs $W_{A,f}|_L(e^{i\pi k t}, k)$ commutent aussi à H quels que soient $t \in \mathbb{R}, k \in L$ ■

A la différence des groupes de symétrie de translation de $H_0 = H_0(A)$, qui sont tous isomorphes quel que soit le choix du potentiel vecteur H et du champ B (voir §III.3.1. Prop. 7) les groupes de symétrie de translation de $H = H(A)$ ne sont pas tous isomorphes lorsqu'on change le potentiel vecteur A ou le champ B (voir [O.T.], [Boo.2] et [Gr.].)

● Définition 8 : Soit

$$B = \frac{ch}{e|\Omega|} (\eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_3 e_3) \quad (3.63)$$

où η_1, η_2, η_3 sont des nombres réels sans dimension et $|\Omega| = |e_1 \wedge e_2 \wedge e_3|$ est le volume de la cellule élémentaire du réseau L .

Le champ magnétique B est dit RATIONNEL si η_1, η_2 et η_3 sont des nombres rationnels; il est dit IRRATIONNEL si un ou plusieurs de ces trois nombres sont irrationnels.

De manière générale, on a le résultat suivant

Proposition 14

Le groupe de symétrie de translation $L^{\omega_A, \hbar}(B)$ de l'opérateur H est de type I si et seulement si le champ B est rationnel.

Démonstration : Elle se base sur un théorème de Thoma, voir réf. [Boo.2] ■

Quelle est l'interprétation physique du "type" du groupe de symétrie de translation de l'hamiltonien H ?

Théoriquement, la situation est claire. Dans le cas particulier où

(Hyp. 6) 1° On choisit la jauge symétrique (3.36);

2° On suppose que le champ magnétique constant B satisfait (Hyp. 3) et que le potentiel cristallin ϕ est indépendant de la variable selon e_3 ;

3° On ignore le mouvement du système le long de l'axe e_3 .

l'hamiltonien du système dans le plan $\{v_1 e_1 + v_2 e_2; v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$, toujours noté H , est donné par

$$H = \frac{1}{2m} \left\{ \left(p_x - \frac{h}{2} \eta y \right)^2 + \left(p_y + \frac{h}{2} \eta x \right)^2 \right\} + \Phi(x, y) \quad (3.64)$$

Considérons dans l'espace de configuration $\{v_1 e_1 + v_2 e_2; v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$ de notre système les deux réseaux suivants

(i) Le réseau cristallin bidimensionnel

$$L_c = \{k_1 e_1 + k_2 e_2; k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\} \quad (3.65)$$

La cellule élémentaire de L_c a une surface $S_c = \|e_1 \wedge e_2\| = |\Omega|$.

(ii) Le réseau de Pippard (voir §III.3.2. Déf. 7)

$$L_{\frac{1}{2}\eta} = \left\{ n_1 e_1 + \frac{1}{\eta} n_2 e_2; n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \right\} \quad (3.54)$$

correspondant à la division de $\{v_1 e_1 + v_2 e_2; v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$ en "cellules magnétiques" de surface $S_{\frac{1}{2}\eta} = \|e_1 \wedge (\frac{1}{\eta} e_2)\| = \frac{|\Omega|}{\eta}$.

La comparaison de ces deux réseaux nous permet d'énoncer

Proposition 15

L'intersection des réseaux cristallin L_c et de Pippard $L_{\frac{1}{2}\eta}$ est un réseau à deux dimensions si et seulement si le champ B est rationnel. En d'autres termes, les réseaux cristallin L_c et de Pippard $L_{\frac{1}{2}\eta}$ sont commensurables si et seulement si le flux η (en unité hc/e) du champ magnétique constant B à travers une cellule élémentaire du réseau cristallin L_c est un nombre rationnel.

Démonstration : Simple vérification; utiliser $B = \frac{ch}{e|\Omega|} \eta e_3$ (Hyp. 3) ■

Expérimentalement, l'observation de la commensurabilité ou de l'incommensurabilité de ces deux réseaux est-elle possible ? Comment la nature peut-elle produire un champ magnétique constant rationnel ou irrationnel ? (voir [H.], [Cap.] et les références contenues dans ces articles) Pas de réponse. N'imaginons pas que le système qui vient d'être examiné est exceptionnel. Mentionnons seulement qu'en physique du solide, il existe plusieurs modèles, par exemple pour décrire des dislocations cristallines dans une monocouche épitaxiale à la surface d'un cristal, exhibant des structures incommensurables [A.A.].

Remarque 14 : Le groupe de symétrie de translation de l'hamiltonien donné par (3.64) est un sous-groupe du groupe de Heisenberg $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma}(3)$, à savoir

$$H_{\eta} = \{ e^{t\omega_0} e^k ; t \in \mathbb{R} ; k = k_1 e_1 + k_2 e_2 ; k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \} \quad (3.66)$$

(Voir §III.3.2. et utiliser §III.3.3. Prop. 13). Remarquons encore d'une part que le réseau de Pippard $L_{\frac{1}{2}\eta}$ est exactement le réseau principal de l'espace symplectique $(\mathbb{R}^2, \frac{1}{2}\eta\sigma)$ utilisé pour construire la représentation de type réseau $(\pi^{\frac{1}{2}\eta\sigma}_1, \mathcal{H}^{\frac{1}{2}\eta\sigma}_1)$ du groupe de Heisenberg $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma}(3)$ (voir §II.4.(c)). D'autre part, l'hamiltonien (3.64) peut s'écrire $H = \frac{1}{2m} \{ P^2 + (\hbar\eta)^2 Q^2 \} + \Phi$, où Q et P sont les opérateurs infinitésimaux de cette représentation de type réseau de $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma}(3)$ (voir §II.4. Lemme 5 avec $a = 2\pi\eta$ et $b = 1/\hbar$).

Propriétés spectrales de l'hamiltonien d'un électron soumis à un champ magnétique constant rationnel et à un potentiel cristallin

Rassemblant les résultats et remarques énoncés jusqu'ici à propos du problème de l'électron soumis à un champ magnétique constant avec ou sans potentiel cristallin, nous sommes prêts pour déterminer le spectre (et les fonctions propres) de l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} \left\{ \left(p_x - \frac{\hbar}{2}\eta y \right)^2 + \left(p_y + \frac{\hbar}{2}\eta x \right)^2 \right\} + \Phi(x, y) \quad (3.64)$$

avec $\eta = \frac{r}{s}$ (r, s deux entiers strictement positifs premiers entre eux).
On va se placer dans la représentation de type réseau du groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}\eta\sigma_r}(5)$ et exploiter le fait que cette représentation est induite.

Proposition 16

Soient

$H = H_0 + \Phi$ l'hamiltonien, donné par (3.64), du système d'un électron soumis à un champ magnétique constant $B = \frac{ch}{e|\Omega|} \eta e_3$, avec $\eta = \frac{r}{s}$ (r, s deux entiers strictement positifs premiers entre eux) dans un potentiel cristallin Φ . Il décrit le mouvement du système dans le plan $\{v_1 e_1 + v_2 e_2; v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$. On suppose que Φ est indépendant de la variable selon e_3 et qu'il satisfait (Hyp. 5); on écrit H_0 dans la jauge symétrique.

$(\pi^{\frac{1}{2}\eta C}_1, \sigma \pi^{\frac{1}{2}\eta C}_1)$ la représentation de type réseau du groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}\eta\sigma_r}(5)$ (voir §II.4.c)).

$$\psi(H_\eta) = \left\{ e^{i\omega_0} e^{k_1(e_1 - \frac{1}{2}p_1) + k_2(e_1 + \frac{1}{2}p_1)}, t \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

le sous-groupe de $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}\eta\sigma_r}(5)$ image par l'application ψ du groupe de symétrie de translation H_η de l'opérateur H , dans $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}\eta\sigma_r}(5)$ (voir §III.3.2. Prop. 11(a) et (3.66)).

(suite, voir page suivante)

Proposition 16 (suite)

Alors :

- (i) La restriction $\pi_1^{\frac{1}{2}\nu} \subset \big|_{\Psi(H_Q)}$ de la représentation $\pi_1^{\frac{1}{2}\nu} \subset$ à $\Psi(H_Q)$ est une représentation continue unitaire réductible de $\Psi(H_Q)$ sur $\mathcal{H}_1^{\frac{1}{2}\nu}$; il existe une mesure de Borel standard, un champ

μ -mesurable $\xi \mapsto \mathcal{H}(\xi)$ d'espaces hilbertiens sur

$$D = \left\{ \xi = \xi_1 \left(e_1 - \frac{1}{2} f_2 \right) + \xi_2 \left(e_1 + \frac{1}{2} f_1 \right) ; \xi_1, \xi_2 \in \left[0, \frac{1}{(2)^\Gamma} \right[\right.$$

où $(2)^\Gamma$ vaut Γ si Γ est pair et vaut 2Γ si Γ est impair $\left. \right\}$,

et un isomorphisme de $\mathcal{H}_1^{\frac{1}{2}\nu}$ sur $\int_D^{\oplus} d\mu(\xi) \mathcal{H}(\xi)$ tels que H_0 et H soient décomposables

$$H = \int_D^{\oplus} d\mu(\xi) H(\xi) \quad \text{avec} \quad H(\xi) = H_0(\xi) + \Phi(\xi)$$

N.B. : D est appelée "zone de Brillouin abstraite".

- (ii) Les "opérateurs réduits" $H_0(\xi)$ et $H(\xi)$ ont tous deux un spectre discret.

$H_0(\xi)$ admet les valeurs propres $E_\ell = \left(\ell + \frac{1}{2} \right) k \frac{h\nu}{m}$ (3.52), chacune étant $(2)^\Gamma$ fois dégénérée.

$H(\xi)$ admet un spectre constitué uniquement de valeurs propres isolées avec des multiplicités finies, la dégénérescence de chaque valeur propre est $\geq \frac{s}{2}$.

Démonstration : Voir [Be]. En quelques mots, (i) découle du théorème d'induction-réduction (voir [Ma.3]) car la représentation de type réseau est induite. L'assertion (ii) provient de ce que $H_0(\xi)$ et $H(\xi)$ sont des opérateurs essentiellement autoadjoints et qu'ils admettent une résolvante compacte ■

Puisque $H_0(\xi)$ et $H(\xi)$ ont tous deux un spectre purement discret, on peut appliquer au calcul des valeurs propres et fonctions propres de $H(\xi)$ les méthodes classiques du calcul de perturbations (voir [Be.]).

CONCLUSION : Parce que le groupe de symétrie de translation H_η (3.66) de l'hamiltonien H donné par (3.64) avec η rationnel est un sous-groupe du groupe de Heisenberg $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_+}(3)$, qu'il est de type I, grâce à la forme particulière des opérateurs composant H (Remarque 14) et du fait que l'opérateur H agit dans $L^1(\mathbb{R}^1)$, nous avons vu que les outils adéquats pour déterminer le spectre de H sont le groupe de Heisenberg $H_{\frac{1}{2}\eta\sigma_+}(5)$ et sa représentation de type réseau. Est-ce qu'une utilisation astucieuse des propriétés des groupes non de type I et une connaissance approfondie des algèbres de von Neumann qui leurs sont reliées nous apporteront, un jour, la solution au problème correspondant avec η irrationnel ?

REFERENCES

REFERENCES

0. [A.A.] AUBRY, S. et ANDRE, G. : "Analyticity Breaking and Anderson Localization in Incommensurate Lattices" dans les Proceedings VIII International Conference on Group Theoretical Methods in Physics, Kiriati Anavim (1979).
1. [A.C.G.T.] ARECCHI, F.T., COURTENS, E., GILMORE, R. et THOMAS, H. : Phys. Rev. A6 (1972) 2211
2. [A.C.] AUBERSON, M. et CATTANEO, U. : "Projective Representations of Lie Algebras and Lie Groups" (à paraître).
3. [A.K.] AUSLANDER, L. et KOSTANT, B. : Inventiones Math. 14 (1971) 255.
4. [A.T.] AUSLANDER, L. et TOLIMIERI, R. : "Abelian Harmonic Analysis, Theta Functions and Functions Algebras on a Nilmanifold", Lecture Notes in Mathematics No 436, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York (1975).
5. [Bab.] BABBITT, D. : dans "Studies in Mathematical Physics", Essays in Honor of Valentine Bargmann; édité par E.H. Lieb, B. Simon et A.S. Wighman, Princeton University Press (1976), p. 19.
6. [Ban.] BANACH, S. : "Théorie des opérations linéaires", Monogr. Mat. Tome 1, PWN, Warszawa (1932).
7. [Bar.1] BARGMANN, V. : Ann. Math. 59 (1954) 1.
8. [Bar.2] BARGMANN, V. : J. Math. Phys. 5 (1964) 862.
9. [Bar.3] BARGMANN, V. : Comm. on Pure and Applied Math. 14 (1961) 187.
10. [B.B.G.K.] BARGMANN, V. BUTERA, P., GIRARDELLO, L., KLAUDER, J.R. : Reports on Math. Phys. 2 (1971) 221.
11. [B.C.D.] BERNAT, P., CONZE, N., DUFLO, M., LEVY-NAHAS, M., RAIS, M., RENOUEAU, P., VERGNE, M. : "Représentations des groupes de Lie résolubles"; Monographies de la société mathématique de France No 4, Dunod, Paris (1972).
12. [Be.] BENTOSELA, F. : Il Nuovo Cimento 16 (1973) 115 et thèse de 3ième cycle, Preprint (Marseille, 1970).

13. [B.G.] BARUT, A.O. et GIRARDELLO, L. : *Comm. Math. Phys.* 21 (1971) 41.
14. [B.G.Z.1] BACKRY, H., GROSSMANN, A. et ZAK, J. : *Phys. Rev.* B12 (1975) 1118.
15. [Bo.1] BOURBAKI, N. : *Algèbre I*, chapitres 1 à 3 (Nouvelle édition), Hermann, Paris (1970).
16. [Bo.2] BOURBAKI, N. : *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 1 et 3 (Nouvelle édition), Hermann, Paris (1971) et (1972).
17. [Boo.1] BOON, H. : "Geometry of Generalized Coherent States" in *"Group Theoretical Methods in Physics"*, A. Janner, T. Janssen et M. Boon, Eds. *Lecture Notes in Physics* No 50, p. 282; Berlin : Springer Verlag (1976).
18. [Boo.2] BOON, M. : *J. Math. Phys.* 13 (1972) 1268.
19. [B.R.] BARUT, A.O. et RACZKA, R. : "Theory of Group Representations and Applications" P.W.N. Polish Scientific Publishers, Warszawa (1977).
20. [Br.] BROWN, E. : dans *Solid State Physics* 22 (1968) 313.
21. [B.S.] BEREZIN, F.A. et SUBIN, M.A. : "Symbols of Operators and Quantization", dans *"Hilbert Space Operators"*, édité par Béla SZ-Nagy (North-Holland Company) (1970), p. 21.
22. [B.Z.] BOON, M. et ZAK, J. : *Phys. Rev.* B18 (1978) 6744.
23. [Ca.1] CATTANEO, U. : *Rep. Math. Phys.* 9 (1976) 31.
24. [Ca.2] CATTANEO, U. : *J. Math. Phys.* 19 (2) (1978) 452.
25. [Ca.3] CATTANEO, U. : *J. Math. Phys.* 19 (4) (1978) 767.
26. [Ca.4] CATTANEO, U. : communication privée.
27. [Cal.] CALABI, E. : *Ann. Math. Pura Appl.* 32 (1951) 295.
28. [Cap.] CAPEL, H.W. : *Physica* 42 (1969) 491 et *Physica* 54 (1971) 361.
29. [Car.] CARTIER, P. : dans *"Proceedings of Symposia in Pure Mathematics"*, Vol. IX, A.M.S., Providence (1966) p. 361.
30. [C.J.] CATTANEO, U. et JANNER, A. : *J. Math. Phys.* 15 (1974) 1155.
31. [[Da.] DAVIES, E.B. : "Quantum Theory of Open Systems" Academic Press, London (1976).

32. [D.G.] DAUBECHIES, I. et GROSSMANN, A. : "An Integral Transform Related to Quantization" (1978), à paraître.
33. [Di.] DINGLE, R.B. : Proc. Roy. Soc. A, 211 (1952) 500.
34. [Dix.] DIXMIER, J. : Trans. Am. Math. Soc. 104 (1962) 278 (Lemme 3).
35. [D.M.] DOEBNER, H.D. et MELSHEIMER, O. : Il Nuovo Cimento IL A1 (1967), 73 - 97.
36. [Em.] EMCH, G. : "Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory" Wiley-Interscience, New-York (1972).
37. [Fo.] FOCK, V. : Z. Physik 49 (1928) 339.
38. [FS³.] FLATO, M., SIMON, J., SNELLMANN, H. et STERNHEIMER, D. : Ann. Scient. de l'Ecole Norm. Sup. 5 (1972) 423.
39. [G_d.] GARDING, A. : Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 33 (1947) 331.
40. [Gl.1] GLAUBER, R.J. : Phys. Rev. 131 (1963) 2766.
41. [Gl.2] GLAUBER, R.J. : Phys. Rev. 130 (1963) 2529.
42. [G.R.] GRADSHTEYN, I.S. et RYZHIK, I.M. : "Table of Integrals, Series, and Products" Academic Press, New-York and London (1965).
43. [H.] HOFSTADTER, D.R. : Phys. Rev. B14 (1976) 2239.
44. [Jo.] JOST, R. : "Quantenmechanik I et II" Verlag der Fachvereine an der ETH/Zürich (1969 et 1973 respectivement).
45. [J.F.] JANNUSSIS, A. et FILIPPAKIS, P. : Lett. al Nuovo Cimento 23 (4) (1978) 121.
46. [Ki.] KIRILLOV, A.A. : Uspekhi Math. Nauk. 17 (1962) 57, translated in London Math. Soc. Translations (1963).
47. [K.N.] KOBAYASHI, S. et NOMIZU, K. : "Foundations of Differential Geometry" (Vol. II. chapitre IX) Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New-York, London, Sydney (1969).
48. [K.S.] KLAUDER, J.R. et SUDARSHAN, E.C.G. : "Fundamentals of Quantum Optics" W.A. Benjamin (1968).
49. [L.] LANDAU, L. : Z. Physik 64 (1930) 629.
50. [Ma.1] MACKEY, G.W. : Acta Math. 99 (1958) 265.

51. [Ma.2] MACKEY, G.W. : "The Theory of Unitary Group Representations",
the University of Chicago Press, Chicago and London (1976).
52. [Ma.3] MACKEY, G.W. : "Unitary Group Representations in Physics,
Probability and Number Theory", Benjamin, Cummings Publishing
Company, Inc. Advanced Book Program Reading, Massachusetts
(1978).
53. [Ma.4] MACKEY, G.W. : in "Functional Analysis and Related Fields",
Proc. Conf. in Honor of Prof. M. Stone, University of Chicago,
May 1968, Ed. F.E. Browder, Springer-Verlag (1970).
54. [M.H.] MILNOR, J. et HUSEMOLLER, D. : "Symmetric Bilinear Forms",
Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New-York (1973).
55. [M.M.] MAURIN, K. et MAURIN, L. : Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci.
Math. Astronom. Phys. 11 (1963) 525.
56. [Mo.] MOORE, C.C. : Trans. Amer. Math. Soc. 113 (1964) 64.
57. [M.R.] MARTIN, P. et ROTHEN, F. : "Introduction aux champs quantiques
et aux problèmes à N corps"; Troisième Cycle de la Physique
en Suisse romande (1977 - 1978).
58. [Ne.] NELSON, E. : Ann. of Math. 70 (1959) 572.
59. [O.T.] OPECHOWSKY, W. et TAM, G.W. : Physica 42 (1969) 529.
60. [P.] PUTNAM, C.R. : "Commutation Properties of Hilbert Space
Operators and Related Topics" Springer-Verlag Berlin -
Heidelberg - New-York (1967).
61. [Pe.1] PERELOMOV, A.M. : Theoret. Math. Phys. 6 (1971) 213.
62. [Pe.2] PERELOMOV, A.M. : Commun. Math. Phys. 26 (1972) 222.
63. [Pe.3] PERELOMOV, A.M. : Translation of Functional Anal. i Prilozen
6 (1972) 47.
64. [Pe.4] PERELOMOV, A.M. : Sov. Phys. Usp. 20 (9) (1977) 703.
65. [Pi.] PIPPARD, A.B. : Phil. Trans. Roy. Soc. (London) A 256 (1963)
317.
66. [Ra.] RADCLIFFE, J.M. : Journ. Phys. A4 (1971) 313.

67. [Ri.] RIECKERS, A. : dans Group Theoretical Methods in Physics,
Lecture Notes in Physics No 79, p. 528 Eds. P. Kramer and
A. Rieckers, Berlin : Springer-Verlag (1978).
68. [R.N.] RIESZ, F. et SZ.-NAGY, B. : "Leçons d'analyse fonctionnelle",
Paris, Gauthier-Villars (1955).
69. [R.S.] REED, M. et SIMON, S. : "Methods of Modern Mathematical
Physics" II. Academic Press New-York and London (1975).
70. [Sch.] SCHRÖDINGER, E. : Naturwissenschaften 14 (1926) 664.
71. [Schw.] SCHWINGER, J. : Phys. Rev. 91 (1953) 728.
72. [Se.] SEGAL, I.E. : J. Math. 6 (1962) 500.
73. [Si.] SIMMS, D.J. : Rep. Math. Phys. 2 (1971) 283.
74. [St.] STONE, M.H. : Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 16 (1930) 172.
75. [To.] TOLIMIERI, R. : Trans. Amer. Math. Soc. 228 (1977) 329 et
J. of Func. Anal. 24 (1977) 353.
76. [Va.] VARADARAJAN, V.S. : "Geometry of Quantum Theory", Vol. I et II.
Van Nostrand Reinhold, New-York, (1968) et (1970).
77. [Von N.] VON NEUMANN, J. : Math. Ann. 104 (1931) 570.
78. [Von N.2] VON NEUMANN, J. : "Mathematical Foundations of Quantum Mecha-
nics", Princeton (1955).
79. [We.] WEYL, H. : "The Theory of Groups and Quantum Mechanics",
Dover Publications, New-York (1950).
80. [Wi.] WIGNER, E. : Ann. Math. 40 (1939) 149.
81. [W.W.] WHITTAKER, E.T. et WATSON, G.N. : "A Course of Modern Analysis",
quatrième édition, Cambridge at the University Press (1952).
82. [Za.] ZAK, J. : Solid State Phys. 27 (1972) 1.
83. [Za.1] ZAK, J. : Phys. Rev. 168 (1968) 686 et 177 (1969) 1151.

